

Galerkin'in menetelmä

Galerkinin menetelmän soveltaminen ei ole rajoittunut vain ongelmiin, jotka voidaan pukea sellaiseen variaatiomuotoon, joka on seurauksena funktionaalien minimoimisesta, kuten potentiaalienergian minimin periaate, joten Galerkinin menetelmää voidaan pitää näitä yleispätevämpänä ja se soveltuu myös epäkonservatiivisille systeemeille.

http://en.wikipedia.org/wiki/Boris_Galerkin

Differentiaaliyhtälöistä

Differentiaaliyhtälöllä tarkoitetaan matematiikassa yhtälöä, jossa esiintyy tuntematon yhden tai useamman muuttujan funktio sekä sen derivaattoja. Differentiaaliyhtälöillä on runsaasti käyttöä mitä erilaisimmissa käytännön sovelluksissa, erityisesti fysikaalisten ilmiöiden mallintamisessa, mutta sovelluskenttä jatkuu lääkeaineen poistumisesta jyrkijäkantojen vaihteluun.

Differentiaaliyhtälöiden ratkaisemiseen ei ole olemassa mitään yleispätevää menetelmää, vaan ratkaiseminen tapahtuu yleensä tunnistamalla yhtälö tietyn muotoiseksi ja käyttämällä tämän nimenomaisen yhtälötyypin ratkaisumenetelmää. Mikäli yhtälön analyttinen ratkaiseminen ei ole mahdollista, on tyydyttävä numeeriseen ratkaisuun, kuten elementtimenetelmään.

Jos tuntematon funktio on yhden muuttujan funktio, esimerkiksi $u(x)$, puhutaan tavallisesta differentiaaliyhtälöstä tai vain differentiaaliyhtälöstä. Esimerkkejä tavallisista differentiaaliyhtälöistä ovat

$$\begin{aligned}\sigma_{,x} &= -f_x \\ EAu_{,xx} &= -q_x \\ EI_z v_{,xxxx} &= q_x\end{aligned}\tag{1}$$

Differentiaaliyhtälön kertaluku on sama kuin korkeimman siinä esiintyvän derivaatan kertaluku. Yllä olevista esimerkeistä ensimmäinen on ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälö, toinen on toista kertalukua ja viimeinen on neljännen kertaluvun differentiaaliyhtälö.

Differentiaaliyhtälö on lineaarinen, jos ratkaistavaa funktiota tai sen derivaattoja ei ole korotettu potenssiin. Sen sijaan yhtälön oikealla puolella voi olla epälineaarinen etukäteen tunnettu funktio.

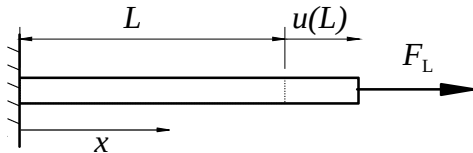
Jos tuntematon funktio on usean muuttujan funktio, esimerkiksi $v(x, y)$, kyseessä on osittaisdifferentiaaliyhtälö. Yhtälössä esiintyvät derivaatat ovat tällöin funktion v osittaisderivaattoja muuttujien (tässä x, y) suhteen. Osittaisdifferentiaaliyhtälöiden käsittely eroaa jonkin verran tavallisista differentiaaliyhtälöistä. Esimerkkejä osittaisdifferentiaaliyhtälöistä ovat

$$\begin{aligned}\Delta f(x, y) &= \nabla^2 f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \\ \Delta f(x, y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = h\end{aligned}\tag{2}$$

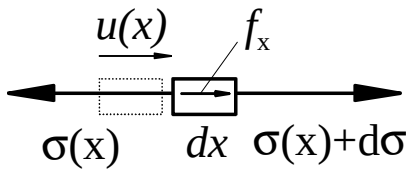
joista ensimmäinen on Laplace'n yhtälö tasossa ja se on homogeeninen eli yhtälön oikealla puolella on nolla. Jälkimmäinen on Poisson'in yhtälö, joka on siis epähomogeeninen.

Sauvan differentiaaliyhtälö statiikan tasapainoehtojen avulla

Tarkastellaan kuvan **vakiopoikkileikkauksista** sauvaa, jonka vasen pää on kiinnitetty. Paikkakoordinaatin x origo on asetettu sauvan vasempaan päähän.



Sauvan poikkileikkauksen pinta-ala on A ja sen materiaalin kimmokerroin on E . Sauvaan kohdistuu oikean pään pistevoiman lisäksi tilavuusvoima f_x . Johdetaan sauvan jännitysten differentiaaliyhtälö käyttäen sauvan differentiaalipalasan voimatasapainoehtoa.



Vaakasuuntaisten voimien summa on

$$-\sigma(x)A + (\sigma(x) + d\sigma)A + f_x A dx = 0 \quad (3)$$

josta jakamalla pinta-alalla ja pituudella dx saadaan jännityksen tasapainodifferentiaaliyhtälö

$$\sigma_{,x} + f_x = 0 \quad (4)$$

käyttämällä sauvan suuntaiselle venymälle lauseketta

$$\varepsilon = u_{,x} \quad (5)$$

ja normaalijännitykselle yhteyttä

$$\sigma = E\varepsilon = E u_{,x}$$

saadaan yhtälöstä (2) siirtymädifferentiaaliyhtälö

$$EA u_{,xx} + q_x = 0 \quad (6)$$

missä on käytetty tilavuusvoiman sijaan voiman pituustiheyttä

$$q_x = A f_x \quad (7)$$

Galerkin'in menetelmä

Galerkin'in menetelmällä ratkaistaan tutkittavassa alueessa Ω , joka edellisessä yhtälössä (6) on $x \in]0, L[$, voimassa oleva differentiaaliyhtälö likimääräisesti. Differentiaaliyhtälö voidaan kirjoittaa kompaktissa muodossa

$$\mathcal{L}u(\mathbf{x}) = P \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (8)$$

missä u on tuntematon funktio ja $\mathcal{L}$ on lineaarinen differentiaalioperaattori. Esimerkiksi yhtälön (6) operaattori on muotoa

$$\mathcal{L} = EA \frac{d^2}{dx^2} \quad (9)$$

ja ns. kuormitustermi

$$P = -q_x \quad (10)$$

Tarkassa ratkaisussa differentiaaliyhtälö toteutuu tutkittavan alueen jokaisessa pisteessä. Jos yhtälö halutaan ratkaista vain likimääräisesti, voidaan funktio u korvata likimääräisellä funktiolla

$$\tilde{u}(x) = \sum_{i=1}^n Q_i G_i \quad (11)$$

missä G_i ovat tunnettuja funktioita ns. kantafunktioita ja kertoimet Q_i ovat toistaiseksi tuntemattomia. Likifunktion tulee toteuttaa myös oleelliseksi valitut reunaehdot, joita edellisessä sauvatehtävässä on vain yksi eli $\tilde{u}(0) = 0$. Luonnollisiksi valitut reunaehdot hoidetaan muulla tavalla, yleensä osittaisintegroinnilla, jolloin voidaan myös lieventää kantafunktioiden derivoituvuusvaatimuksia. Määritellään yhtälön virhe (residuaali)

$$e(x) = \mathcal{L}\tilde{u} - P \quad (12)$$

ja koitetaan saada virhe jollain painofunktiolla kerrottana keskimäärin häviämään tarkastelualueessa.

$$\int_{\Omega} W_i (\mathcal{L}\tilde{u} - P) d\Omega = 0 \quad i = 1 \dots n \quad (13)$$

Painofunktion valinnan perusteella on olemassa useita eri ratkaisumenetelmiä. Galerkin'in menetelmässä painofunktioina käytetään kantafunktioita G_i .

$$\int_{\Omega} G_i (\mathcal{L}\tilde{u} - P) d\Omega = 0 \quad i = 1 \dots n \quad (14)$$

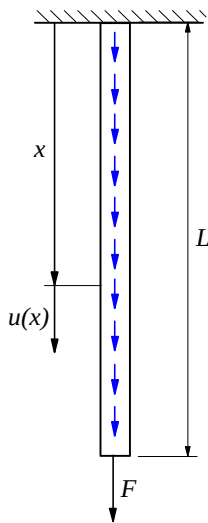
Eräs Galerkin'in menetelmän esitysmuoto on käyttää integraalissa (13) painofunktion paikalla yrittien (11) variaatiota tuntemattomien parametrien Q_i suhteen

$$\delta\tilde{u}(x) = \sum_{i=1}^n \delta Q_i G_i \quad (15)$$

$$\int_{\Omega} \delta \tilde{u} (\mathcal{L} \tilde{u} - P) d\Omega = 0 \quad (16)$$

Asettamalla nyt vuorollaan kaikki muut variaatiot δQ_j $j \neq i$ nolliksi paitsi δQ_i , niin saadaan n kappaletta yhtälöitä, jotka ovat muotoa (14) kerrottuna vakiolla δQ_i , joka ei ole nolla, joten yhtälön (14) tulee olla nolla.

Alla olevassa esimerkissä on käytetty edellä esitettyä muotoa (16), joka tässä esimerkissä voidaan tulkita virtuaalisen työn periaatteeksi.



Esimerkki: Sauvaa rasittaa tilavuusvoima $f_x = \rho g$ ja pistekuorma $F = 10$ kN, materiaalin kimmokerroin $E = 200$ MPa, teräksen tiheys $\rho = 7850$ kg/m³, $g = 9.81$ m/s², $L = 2000$ m ja $A = 0.001$ m². Määritä vapaan pään siirtymä ja tyven jännitys. Valitaan tehtävän siirtymälle kinemaattisesti käypä yrite:

$$\tilde{u}(x) = \sum_{i=1}^n Q_i G_i = Q_1 x + Q_2 x^2 \text{ ja olkoon virtuaalinen siirtymä (siirtymän variaatio)}$$

$$\delta \tilde{u}(x) = \delta Q_1 x + \delta Q_2 x^2. \text{ Käytetään Galerkin'in menetelmää yhtälöön (4) eli}$$

$$A \int_L \sigma_{,x} \delta \tilde{u} dx + A \int_L f_x \delta \tilde{u} dx = 0. \text{ Osittaisintegroimalla ensimmäinen termi saadaan}$$

$$A \left[\sigma(x) \delta \tilde{u} \right]_0^L - A \left[\int_L \sigma \delta \tilde{u}_{,x} dx - \int_L f_x \delta \tilde{u} dx \right] = 0.$$

Ottamalla huomioon, että

$$\delta \tilde{u}(0) = 0, \delta \tilde{u}(L) = \delta \tilde{u}_L = \delta Q_1 L + \delta Q_2 L^2, \sigma = E \tilde{u}_{,x} \text{ ja } A \sigma(L) = F \text{ saadaan}$$

$$F \delta \tilde{u}_L - A \left[\int_L E \tilde{u}_{,x} \delta \tilde{u}_{,x} dx - \int_L \rho g \delta \tilde{u} dx \right] = 0$$

eli

$$F \delta Q_1 L - A \left[\int_L E (Q_1 + 2Q_2 x) \delta Q_1 dx - \int_L \rho g x \delta Q_1 dx \right] = 0 \quad \forall \delta Q_1$$

$$F \delta Q_2 L^2 - A \left[\int_L E (Q_1 + 2Q_2 x) 2x \delta Q_2 dx - \int_L \rho g x^2 \delta Q_2 dx \right] = 0 \quad \forall \delta Q_2$$

jossa ensimmäinen yhtälöistä on saatu asettamalla $\delta Q_2 = 0$ ja toinen vastaavasti $\delta Q_1 = 0$.

Supistamalla ao. variaatioilla saadaan

$$FL - A \left[\int_L E (Q_1 + 2Q_2 x) dx - \int_L \rho g x dx \right] = 0$$

$$FL^2 - A \left[\int_L E (Q_1 + 2Q_2 x) 2x dx - \int_L \rho g x^2 dx \right] = 0$$

$$\int_L (Q_1 + 2Q_2 x) dx = \frac{1}{E} \int_L \rho g x dx + \frac{FL}{EA}$$

$$\int_L (Q_1 + 2Q_2 x) 2x dx = \frac{1}{E} \int_L \rho g x^2 dx + \frac{FL^2}{EA}$$

$$Q_1 L + Q_2 L^2 = \frac{\rho g L^2}{2E} + \frac{FL}{EA} \quad \Leftrightarrow \quad Q_1 + Q_2 L = \frac{\rho g L}{2E} + \frac{F}{EA}$$

$$Q_1 L^2 + \frac{4}{3} Q_2 L^3 = \frac{\rho g L^3}{3E} + \frac{FL^2}{EA} \quad \Leftrightarrow \quad 3Q_1 + 4Q_2 L = \frac{\rho g L}{E} + 3 \frac{F}{EA}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & L \\ 3 & 4L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{F}{EA} + \frac{\rho g L}{2E} \\ \frac{3F}{EA} + \frac{\rho g L}{E} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} 4L & -L \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{F}{EA} + \frac{\rho g L}{2E} \\ \frac{3F}{EA} + \frac{\rho g L}{E} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{F}{EA} + \frac{\rho g L}{E} \\ -\frac{\rho g}{2E} \end{bmatrix}$$

$$\rho := 7850 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad F := 10000 \text{ N} \quad E := 200 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \quad g := 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad L := 2000 \text{ m}$$

$$A := 0.001 \text{ m}^2$$

$$Q_1 := \frac{F}{E \cdot A} + \frac{\rho \cdot g \cdot L}{E} = 8.201 \times 10^{-4}$$

$$Q_2 := \frac{-\rho \cdot g}{2 \cdot E} = -1.925 \times 10^{-7} \frac{1}{\text{m}}$$

$$u_{\text{mato}}(x) := Q_1 \cdot x + Q_2 \cdot x^2 \quad u_{\text{mato}}(L) = 0.87 \text{ m}$$

$$\sigma_x(x) := E \cdot \left(\frac{d}{dx} u_{\text{mato}}(x) \right) \quad \sigma_x(0) = 164.017 \text{ MPa}$$

Huomataan, että Galerkinin menetelmä antoi ”saman” tuloksen kuin laskuharjoituksen 3 tehtävä 3. Erona on tietysti kantafunktiot ja pistevoima F , joka puuttui harjoitustehtävästä.

Variaatiomuodosta vahvaan muotoon

Tämä jatko on tarkoitettu vain asiasta kiinnostuneille. Kokeillaan vielä, saadaanko yhtälö (6) johdetuksi lähtien potentiaalienergian minimin periaatteesta. Lineaarisesti kimmoisen sauvan kimmoenergia

$$U = \int_V \int_0^\varepsilon \sigma d\varepsilon = \int_V \int_0^\varepsilon E \varepsilon d\varepsilon = \int_V \frac{E}{2} \varepsilon^2 = \frac{1}{2} \int_0^L EA u_{,x}^2 dx \quad (17)$$

Ulkoisen kuormituksen (pistevoima ja tilavuusvoima) potentiaali

$$W_p = - \int_0^L A(x) f_x u(x) dx - F_L u(L) \quad (18)$$

Potentiaalienergian minimin periaatteesta saadaan

$$\delta \Pi = \delta U + \delta W_p \quad (19)$$

Kimmoenergian variaatio

$$\delta U = \int_0^L \frac{EA}{2} \delta(u_{,x}^2) dx = \int_0^L EA u_{,x} \delta u_{,x} dx \quad (20)$$

joka osittaisintegroinnilla saadaan muotoon, jossa on siirtymän u variaatio

$$\delta U = \int_0^L EA u_{,x} \delta u_{,x} dx = EA u_{,x}(L) \delta u(L) - \int_0^L EA u_{,xx} \delta u(x) dx \quad (21)$$

Ulkoisen kuormituksen variaatio

$$\delta W_p = - \int_0^L A(x) f_x \delta u(x) dx - F_L \delta u(L) \quad (22)$$

ja yhtälö (19) menee muotoon

$$\delta \Pi = EA u_{,x}(L) \delta u(L) - \int_0^L EA u_{,xx} \delta u(x) dx - \int_0^L A(x) f_x \delta u(x) dx - F_L \delta u(L) = 0 \quad (23)$$

ottamalla huomioon, että $EA u_{,x}(L) \delta u(L) - F_L \delta u(L) = 0$, saadaan yhtälöstä (19)

$$\delta \Pi = - \int_0^L (EA u_{,xx} + A f_x) \delta u(x) dx = 0 \quad \forall \delta u$$

joka on mahdollista vain jos $EA u_{,xx} + A f_x = 0$