

Dynamiikan tehtävä

Lähdetään liikkeelle statiikan perusyhtälöstä

$$\mathbf{K} \mathbf{Q} = \mathbf{F} \quad (1)$$

Hitausvoimaperiaatteen mukaan yhtälö on voimassa myös dynamiikan ongelmassa, mikäli kuormitusvektoriin $\mathbf{F}$ sisällytetään lisäksi hitausvoimien ekvivalenttiset lausekkeet, jotka kootaan tavalliseen tapaan sijoittelusummaamalla ne elementeittäin. Hitausvoima voidaan tulkita tilavuusvoimaksi, jonka tiheys on

$$\mathbf{f}^p = -\rho \ddot{\mathbf{u}} \quad (2)$$

Olettamalla, että elementin kunkin pisteen P kiihtyvyys voidaan lausua elementin solmukiihtyvyyssvektorin avulla muodossa

$$\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{N} \ddot{\mathbf{q}} \quad (3)$$

saadaan elementin vastaavat ekvivalenttiset solmuvoimat

$$\mathbf{f}^H = -\int_{V_e} \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} \ddot{\mathbf{q}} dV = -\int_{V_e} \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV \ddot{\mathbf{q}} = -\mathbf{m}_e \ddot{\mathbf{q}} \quad (4)$$

Kutsutaan edellä olevaa matriisia elementin (konsistentiksi eli yhteensopivaksi) massamatriisiksi, mikäli käytetään samaa interpolointimatriisia $\mathbf{N}$ kuin siirtymäkentän muodostamisessakin

$$\mathbf{m}_e = \int_{V_e} \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV \quad (5)$$

Statiikan perusyhtälö saadaan nyt muotoon

$$\mathbf{K} \mathbf{Q} = \mathbf{F} + \sum_e \mathbf{f}^H = \mathbf{F} - \sum_e \mathbf{m}_e \ddot{\mathbf{q}} \quad (6)$$

Vastaavalla tavalla kuin koko laskentamallin jäykkyysmatriisi saatiin elementtien jäykkyysmatriiseista sijoittelusummauksella, saadaan myös koko laskentamallin massamatriisi

$$\mathbf{M} = \sum_e \mathbf{m}_e \quad (7)$$

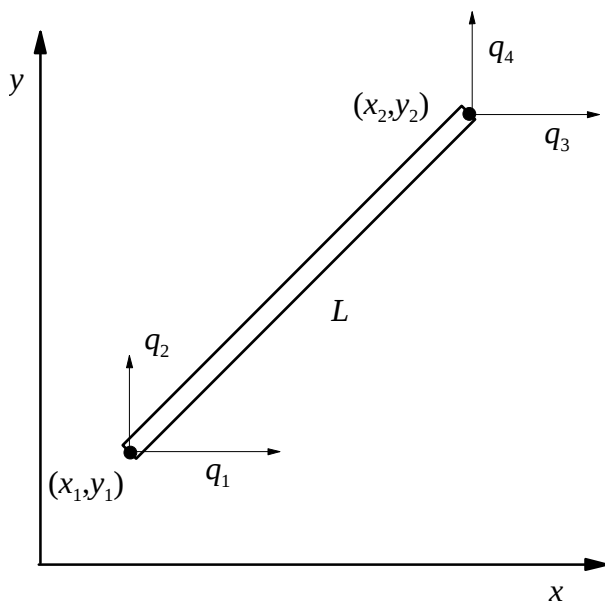
Massamatriisilla $\mathbf{M}$ on sama dimensio ja puolinauhanleveys kuin koko laskentamallin jäykkyysmatriisilla $\mathbf{K}$. Kontinuumirakenteen lineaarisen vaimentamattoman liikeongelman FEM-mallin perusyhtälö saatiin nyt muotoon

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{Q}} + \mathbf{K} \mathbf{Q} = \mathbf{F} \quad (8)$$

Konsistentin massamatriisin *consistent mass matrix* otti tietävästi ensimmäisenä käyttöön Archer v. 1965. Aikaisemmin oli käytetty yksinkertaisempaa massamatriisia, jossa elementin massa oli jaettu pistemassoiksi elementtien solmuille. Tällainen massamatriisi on lävistäjämatriisi, josta englanninkielessä käytetään nimitystä *lumped mass matrix*.

Yleisesti ottaen konsistentin massamatriisin käyttö johtaa tarkempiin tuloksiin kuin keskitetyn massamatriisin käyttö. Joissain tehtävätyypeissä kuitenkin lävistäjätyyppisen massamatriisin käyttö on huomattavasti tehokkaampaa kuin nauhamaisen matriisin. Esimerkiksi käänteismatriisin saa ottamalla lävistäjäalkioiden käänteisluvut.

Sauvaelementin massamatriisi



Sauvan siirtymä voidaan lausua

$$\mathbf{u}(\xi) = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 \end{bmatrix} \mathbf{q} = \mathbf{N} \mathbf{q} \quad (9)$$

missä interpolaatiofunktiot ovat

$$N_1(\xi) = \frac{1}{2}(1-\xi) \quad N_2(\xi) = \frac{1}{2}(1+\xi) \quad (10)$$

joten konsistentin massamatriisin lausekkeeksi saadaan

$$\begin{aligned}
\mathbf{m}_e &= \int_{V_e} \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV = \frac{\rho AL}{2} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_1 \\ N_2 & 0 \\ 0 & N_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 \end{bmatrix} d\xi \\
&= \frac{\rho AL}{8} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} (1-\xi)^2 & 0 & 1-\xi^2 & 0 \\ 0 & (1-\xi)^2 & 0 & 1-\xi^2 \\ (1-\xi)^2 & 0 & (1+\xi)^2 & 0 \\ 0 & 1-\xi^2 & 0 & (1+\xi)^2 \end{bmatrix} d\xi = \frac{\rho AL}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (11)
\end{aligned}$$

Huomataan, että massamatriisi ei riipu sauvan asennosta. Keskitetty massamatriisi saadaan laskemalla kunkin rivin summa lävistäjälle

$$\mathbf{m}_k = \frac{\rho AL}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

Palkkielementin massamatriisi

Kolmen solmuvapausasteen palkkielementti

Palkin siirtymät u ja v voidaan lausua

$$\mathbf{u}(\xi) = \begin{bmatrix} u(\xi) \\ v(\xi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & N_2 & N_3 & 0 & N_5 & N_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{bmatrix} = \mathbf{N} \mathbf{q} \quad (13)$$

missä muotofunktioiden matriisi on

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1/2(1-\xi) & 0 & 0 & 1/2(1+\xi) & 0 & 0 \\ 0 & 1/4(2-3\xi+\xi^3) & L/8(1-\xi-\xi^2+\xi^3) & 0 & 1/4(2+3\xi-\xi^3) & L/8(-1-\xi+\xi^2+\xi^3) \end{bmatrix} \quad (14)$$

Massamatriisi voidaan muodostaa myös liike-energian lausekkeesta, kuten seuraavassa esityksessä. Palkin kineettinen energia on

$$T = \frac{1}{2} \int_{V^e} \rho \dot{\mathbf{u}}(\xi)^T \dot{\mathbf{u}}(\xi) dV^e \quad (15)$$

Jos palkin poikkileikkaus on vakio, niin sen liike-energia voidaan kirjoittaa

$$T = \frac{1}{2} \frac{\rho AL}{2} \int_{-1}^1 \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{N}^T \mathbf{N} \dot{\mathbf{q}} d\xi = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \left(\frac{\rho AL}{2} \int_{-1}^1 \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\xi \right) \dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{m} \dot{\mathbf{q}} \quad (16)$$

suorittamalla integroinnit saadaan massamatriisiksi (*consistent mass matrix of 6-dof EB beam*)

$$\mathbf{m} = \frac{m}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 54 & -13L \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 13L & -3L^2 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 156 & -22L \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (17)$$

Saatu massamatriisi muuntuu koordinaatiston kierrossa, kuten vastaava jäykkyyismatriisi

$$\mathbf{m}_{xy} = \mathbf{L}^T \mathbf{m} \mathbf{L} \quad (18)$$

Sijoittamalla palkin massa pistemassoiksi solmuille puoliksi, saadaan kolmen solmuvapausasteen palkin keskitetty massamatriisi

$$\mathbf{m}_k = \frac{m}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

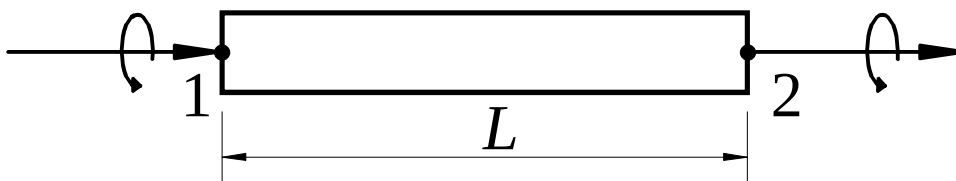
Kahden solmuvapausasteen palkkielementti

Kahden solmuvapausasteen palkkielementin massamatriisi saadaan poistamalla kolmen solmuvapausasteen palkkielementin massamatriisista ensimmäinen ja neljäs rivi ja vastaavat sarakkeet. Alla on myös keskitetty massamatriisi $\mathbf{m}_k$.

$$\mathbf{m} = \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{m}_k = \frac{\rho AL}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

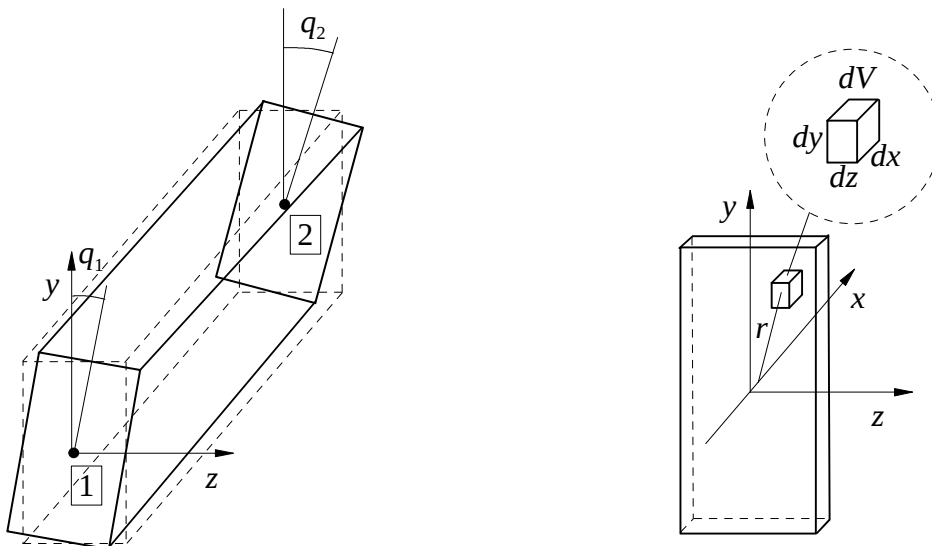
Akselielementin massamatriisi

Vääntöakselin elementtinä käytetään kuvan mukaista kohden solmun lineaarisen interpoloinnin elementtiä.



Määritetään sen konsistentti massamatriisi. Elementin tiheys on ρ poikkileikkauksen polaarinen neliomomentti I_p , pituus L ja pinta-ala on A .

Elementin siirtymäsuureet (kiertokulmat) on havainnollistettu kuvassa



Lausutaan elementin liike-energia solmunopeuksien (kulmanopeuksien) avulla.

$$T^e = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{m}_c \dot{\mathbf{q}} = \iiint_{V^e} \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 dJ_x$$

missä dJ_x on x-akselin suhteen laskettavan hitausmomentin differentiaali. Elementin alueessa solmunopeuksien approksimointiin käytetään samoja interpolaatiofunktioita kuin siirtymillekin

$$\begin{aligned} \phi(\xi) &= N_1 q_1 + N_2 q_2 = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \mathbf{N} \mathbf{q} & N_1 &= \frac{1}{2}(1-\xi) \\ \dot{\phi}(\xi) &= N_1 \dot{q}_1 + N_2 \dot{q}_2 = \mathbf{N} \dot{\mathbf{q}} & N_2 &= \frac{1}{2}(1+\xi) \end{aligned}$$

hitausmomentin differentiaali on

$$dJ_x(x, y, z) = \rho r^2 dV \quad \Rightarrow \quad dJ_x(x) = \iint_A (y^2 + z^2) dA \rho dx = (I_z + I_y) \rho dx = I_p \rho dx$$

missä r on differentiaali-alkion etäisyys x-akselista ja I_p on poikki-pinnan polaarinen neliömomentti. Kulmanopeuden neliö saadaan

$$\dot{\phi}^2(\xi) = \dot{\phi}^T \dot{\phi} = \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{N}^T \mathbf{N} \dot{\mathbf{q}}$$

Liike-energian lauseke saadaan nyt muotoon

$$T^e = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \left[\int_{-1}^1 \mathbf{N}^T \rho I_p \mathbf{N} \frac{L_e}{2} d\xi \right] \dot{\mathbf{q}}$$

joten konsistentti massamatriisi saadaan homogeeniselle palkille

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_c &= \rho I_p \frac{L_e}{2} \int_{-1}^1 \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\xi = \rho I_p \frac{L_e}{2} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} N_1^2 & N_1 N_2 \\ N_1 N_2 & N_2^2 \end{bmatrix} d\xi \\ &= \rho I_p \frac{L_e}{2} \int_{-1}^1 \frac{1}{4} \begin{bmatrix} (1-\xi)^2 & 1-\xi^2 \\ 1-\xi^2 & (1+\xi)^2 \end{bmatrix} d\xi = \rho I_p \frac{L_e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

kerrointermi saadaan tarvittaessa vielä muotoon

$$\rho I_p \frac{L_e}{6} = \rho I_p \frac{A L_e}{6 A} = m_e \frac{I_p}{6 A} = \frac{1}{6} m_e k_G^2$$

missä k_G on poikki-pinnan hitaussäde (katso esim. Dynamiikan perusteet)

Ominaisvärähtely

Kun liikeyhtälössä (8) kuormitusvektori $\mathbf{F}$ on $\mathbf{0}$, saadaan ominaisvärähtelyjen yhtälö

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{Q}} + \mathbf{K} \mathbf{Q} = \mathbf{0} \quad (21)$$

Tämä edustaa vaimenematonta ominaisvärähtelyä. Valitsemalla aikaorigo sopivasti, voidaan sen yleinen ratkaisu esittää muodossa

$$\mathbf{Q}(t) = \mathbf{Q}_0 \sin \omega t \quad (22)$$

joten kyseessä on harmoninen värähdysliike, jonka ominaiskulmataajuus on ω ja amplitudivektori $\mathbf{Q}_0$. Värähdystaajuus $f = \omega / 2\pi$ ja värähdysaika $T = 1 / f = 2\pi / \omega$.

Sijoittamalla ratkaisu ominaisvärähtelyjen yhtälöön saadaan kahden matriisin $\mathbf{K}$ ja $\mathbf{M}$ ominaisarvoyhtälö

$$\mathbf{K} \mathbf{Q}_0 = \omega^2 \mathbf{M} \mathbf{Q}_0 \quad (23)$$

Yhtälö voidaan usein muuntaa yhden matriisin ominaisarvoyhtälöksi, mutta suurilla systeemeillä muunnos ei kannata. Vaihtamalla merkintöjä yhtälö saa muodon

$$\mathbf{K} \mathbf{x} = \lambda \mathbf{M} \mathbf{x} \quad (24)$$

Tällä yhtälöllä on triviaaliratkaisun $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ lisäksi ratkaisuja vain, jos determinanttiyhtälö

$$\det[\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M}] = 0 \quad (25)$$

toteutuu. Determinanttiyhtälöllä on n juurta λ_i , missä n on matriisien $\mathbf{K}$ ja $\mathbf{M}$ dimensio. Ne ovat yhtälön (24) ominaisarvot ja kutakin niistä vastaa oma ominaiskulmataajuutensa $\omega_i = \sqrt{\lambda_i}$. Kun ominaisarvo λ_i sijoitetaan yhtälöön (24) saadaan tästä ratkaistua vastaava ominaisvektori $\mathbf{x}_i$. Se edustaa kyseisen ominaisvärähtelyn ominaismuotoa (värähdysmuotoa). Ominaisvektorin pituus ei ratkea yhtälöstä (24), sillä yhtälön ollessa homogeeninen se toteutuu myös vektorilla $\alpha \mathbf{x}_i$, missä α on mielivaltainen vakio. Tästä seuraa, että ominaisvektorit voidaan normeerata. Tällä kurssilla riittää kun normeerataan vektorin ensimmäinen alkio $\mathbf{x}_1^i = 1$. Edellä esitetty normeeraus ei tietysti onnistu, jos ensimmäinen alkio on 0, jolloin voidaan yrittää valita (esimerkiksi) toinen alkio $\mathbf{x}_2^i = 1$.

Tavallisesti ominaisarvot numeroidaan suuruusjärjestyksessä pienemmästä suurempaan, jolloin on voimassa ($\mathbf{K}$ ja $\mathbf{M}$ oletetaan positiivisesti semidefiniiteiksi)

$$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \dots \lambda_n \leq \infty \quad (26)$$

Ominaisarvo 0 tulee kyseeseen, jos systeemillä on jäykän kappaleen liikemahdollisuus. Vastaavasti ominaisarvo ∞ on mahdollinen, jos systeemillä on massattomia vapausasteita, jolloin massamatriisi $\mathbf{M}$ on singulaarinen ja siis positiivisesti semidefiniitti. Tämä ominaisarvo voi tulla kyseeseen, kun käytetään keskitettyjä massamatriiseja siten, ettei rotaatiovapausasteille ole annettu hitautta.