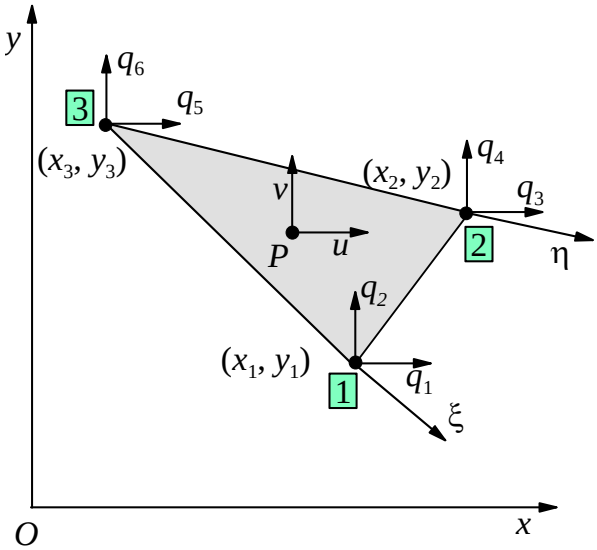
CST-elementti

Tarkastellaan kuvan kolmisolmuista kolmioelementtiä, jota kutsutaan vakiovenymän kolmioelementiksi (Constant Strain Triangle).



Pisteen P koordinaatit voidaan lausua emokoordinaattien $\xi \in [0,1]$ ja $\eta \in [0,1]$ avulla

$$x(\xi,\eta) = N_1(\xi,\eta)x_1 + N_2(\xi,\eta)x_2 + N_3(\xi,\eta)x_3$$

$$y(\xi,\eta) = N_1(\xi,\eta)y_1 + N_2(\xi,\eta)y_2 + N_3(\xi,\eta)y_3 \tag{1}$$

missä funktiot N_1, N_2 ja N_3 ovat kolmioelementin lineaariset muotofunktiot

$$\begin{cases} N_1(\xi,\eta) = N_1 = \xi \\ N_2(\xi,\eta) = N_2 = \eta \\ N_3(\xi,\eta) = N_3 = 1-\xi-\eta \end{cases} \tag{2}$$

Helposti huomaat, että edellä olevilla funktioilla on ominaisuus, että niiden arvo omalla solmulla on 1 ja muilla solmuilla 0 (Delta function property). Lisäksi kaikkien muotofunktioiden summa elementin alueella on 1 (Partitions of unity). Molemmat ominaisuudet ovat muotofunktioiden vaatimuksia, joten jos haluat kehitellä omia muotofunktioita, niin kannattaa yrittää saada funktiot toteuttamaan nämä vaatimukset.

Vastaavasti elementin alueella siirtymäkenttä lausutaan solmusiirtymien avulla

$$u(\xi,\eta) = N_1(\xi,\eta)q_1 + N_2(\xi,\eta)q_3 + N_3(\xi,\eta)q_5$$

$$v(\xi,\eta) = N_1(\xi,\eta)q_2 + N_2(\xi,\eta)q_4 + N_3(\xi,\eta)q_6 \tag{3}$$

Lähdetään sitten etsimään venymän lauseketta elementin alueella. Tätä varten derivoidaan siirtymän *u* lauseke emokoordinaattien suhteen

$$\begin{cases} u_{,\xi} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial \xi} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial \xi} \\ u_{,\eta} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial \eta} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{cases} \tag{4}$$

joka voidaan lausua matriisimuodossa

$$\begin{bmatrix} u_{,\xi} \\ u_{,\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{,x} \\ u_{,y} \end{bmatrix} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} u_{,x} \\ u_{,y} \end{bmatrix} \tag{5}$$

missä matriisi J on kuvauksen Jacobin matriisi. Kolmioelementin tapauksessa

$$\begin{aligned} x &= \xi x_1 + \eta x_2 + (1-\xi-\eta)\, x_3 \\ x_{,\xi} &= x_1 - x_3 = x_{13} \\ x_{,\eta} &= x_2 - x_3 = x_{23} \\ y &= \xi y_1 + \eta y_2 + (1-\xi-\eta)\, y_3 \\ y_{,\xi} &= y_1 - y_3 = y_{13} \\ y_{,\eta} &= y_2 - y_3 = y_{23} \end{aligned} \tag{6}$$

joten Jacobin matriisi lineaariselle kolmioelementille on

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} x_{13} & y_{13} \\ x_{23} & y_{23} \end{bmatrix} \tag{7}$$

Ratkaistaan sitten siirtymän *u* derivaatat koordinaattien x ja y suhteen

$$\begin{bmatrix} u_{,x} \\ u_{,y} \end{bmatrix} = \frac{1}{|\mathbf{J}|} \begin{bmatrix} y_{23} & -y_{13} \\ -x_{23} & x_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{,\xi} \\ u_{,\eta} \end{bmatrix} = \frac{1}{|\mathbf{J}|} \begin{bmatrix} y_{23}u_{,\xi} - y_{13}u_{,\eta} \\ -x_{23}u_{,\xi} + x_{13}u_{,\eta} \end{bmatrix} \tag{8}$$

koska

$$\begin{aligned} u(\xi,\eta) &= \xi q_1 + \eta q_3 + (1-\xi-\eta)\, q_5 \\ u_{,\xi} &= q_1 - q_5 \\ u_{,\eta} &= q_3 - q_5 \end{aligned} \tag{9}$$

niin

$$\begin{bmatrix} u_{,x} \\ u_{,y} \end{bmatrix} = \frac{1}{|\mathbf{J}|} \begin{bmatrix} y_{23}(q_1-q_5) - y_{13}(q_3-q_5) \\ -x_{23}(q_1-q_5) + x_{13}(q_3-q_5) \end{bmatrix} = \frac{1}{|\mathbf{J}|} \begin{bmatrix} y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} & 0 \\ x_{32} & 0 & x_{13} & 0 & x_{21} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{q} \tag{10}$$

vastaavasti

$$
\begin{aligned}
v(\xi,\eta) &= \xi q_2 + \eta q_4 + (1-\xi-\eta) q_6 \\
v_{,\xi} &= q_2 - q_6 \\
v_{,\eta} &= q_4 - q_6
\end{aligned}
\tag{11}
$$

joten

$$
\begin{bmatrix} v_{,x} \\ v_{,y} \end{bmatrix} = \frac{1}{|\mathbf{J}|} \begin{bmatrix} y_{23}(q_2-q_6) - y_{13}(q_4-q_6) \\ -x_{23}(q_2-q_6) + x_{13}(q_4-q_6) \end{bmatrix} = \frac{1}{|\mathbf{J}|} \begin{bmatrix} 0 & y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} \\ 0 & x_{32} & 0 & x_{13} & 0 & x_{21} \end{bmatrix} \mathbf{q}
\tag{12}
$$

Venymäkomponentit elementin alueella saadaan edellä esitetyn perusteella muotoon

$$
\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{,x} \\ v_{,y} \\ u_{,y} + v_{,x} \end{bmatrix} = \frac{1}{|\mathbf{J}|} \begin{bmatrix} y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 & x_{13} & 0 & x_{21} \\ x_{32} & y_{23} & x_{13} & y_{31} & x_{21} & y_{12} \end{bmatrix} \mathbf{q} = \mathbf{B}\,\mathbf{q}
\tag{13}
$$

missä elementin alueella vakiona säilyvää matriisia B kutsutaan elementin kinemaattiseksi matriisiksi, jonka avulla saadaan pisteen P venymäkomponentit kun elementin solmusiirtymät tunnetaan.

Jäykkyysmatriisi

Lineaarisesti kimmoisen kappaleen, jossa on yleinen jännitystila, kimmoenergia saadaan lausekkeesta

$$
U = \int_V U_0 \, dV = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\varepsilon} \, dV
\tag{14}
$$

jos pisteen P jännityskomponentit voidaan lausua (tasojännitystila)

$$
\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \mathbf{D}\,\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}\,\mathbf{B}\,\mathbf{q} = \frac{E}{1-\upsilon^2} \begin{bmatrix} 1 & \upsilon & 0 \\ \upsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\upsilon}{2} \end{bmatrix} \mathbf{B}\,\mathbf{q}
\tag{15}
$$

niin saadaan elementin kimmoenergia lausuttua muodossa

$$
U = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\varepsilon} \, dV = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{q}^{\mathrm{T}} \mathbf{B}^{\mathbf{T}} \mathbf{D}\,\mathbf{B}\,\mathbf{q} \, dV = \frac{1}{2} \mathbf{q}^{\mathrm{T}} t \int_A \mathbf{B}^{\mathbf{T}} \mathbf{D}\,\mathbf{B} \, dA \, \mathbf{q} = \frac{1}{2} \mathbf{q}^{\mathrm{T}} t A \mathbf{B}^{\mathbf{T}} \mathbf{D}\,\mathbf{B}\,\mathbf{q}
\tag{16}
$$

joten elementin jäykkyysmatriisi on

$$
\mathbf{k}_e = t\,A \mathbf{B}^{\mathbf{T}} \mathbf{D}\,\mathbf{B}
\tag{17}
$$

missä *A* on elementin pinta-ala ja *t* elementin vakioksi oletettu paksuus.

Ekvivalenttiset solmukuormitukset

Tilavuuskuormituksen aiheuttama ekvivalenttinen solmukuormitus

Lasketaan ensin tilavuuskuormituksen f aiheuttama ekvivalenttinen solmukuormitus. Tätä varten lausutaan tilavuuskuormituksen potentiaali

$$WP = -\int_V \mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{f}\, dV = -t\int_A \mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{f}\, dA \tag{18}$$

missä t on elementin vakiopaksuus. Siirtymä u elementin alueella voidaan lausua

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u(\xi,\eta) \\ v(\xi,\eta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{bmatrix} = \mathbf{N}\mathbf{q} \tag{19}$$

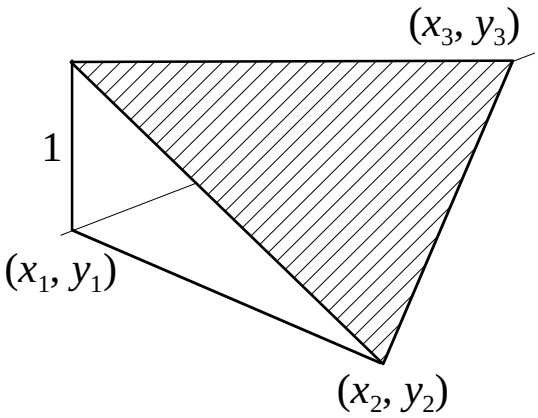
joten tilavuuskuormituksen potentiaali

$$WP = -\mathbf{q}^{\mathrm{T}} t\int_A \mathbf{N}^{\mathrm{T}}\mathbf{f}\, dA = -\mathbf{q}^{\mathrm{T}} t\int_A \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_1 \\ N_2 & 0 \\ 0 & N_2 \\ N_3 & 0 \\ 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} dA = -\mathbf{q}^{\mathrm{T}} t\int_A \begin{bmatrix} N_1 f_x \\ N_1 f_y \\ N_2 f_x \\ N_2 f_y \\ N_3 f_x \\ N_3 f_y \end{bmatrix} dA \tag{20}$$

Huomataan, että

$$\int_A N_i\, dA = \frac{1}{3}A \tag{21}$$

eli integraali edustaa ykkösen korkuisen tetraedrin tilavuutta. Kuvassa on esitetty solmun 1 muotofunktion kuvaaja. Muut solmut tuottavan vastaavan integraalin.



$$WP = -\mathbf{q}^{\mathrm{T}} \frac{t\,A}{3} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_x \\ f_y \\ f_x \\ f_y \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \mathbf{f}^V = \frac{t\,A}{3} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_x \\ f_y \\ f_x \\ f_y \end{bmatrix} \tag{22}$$

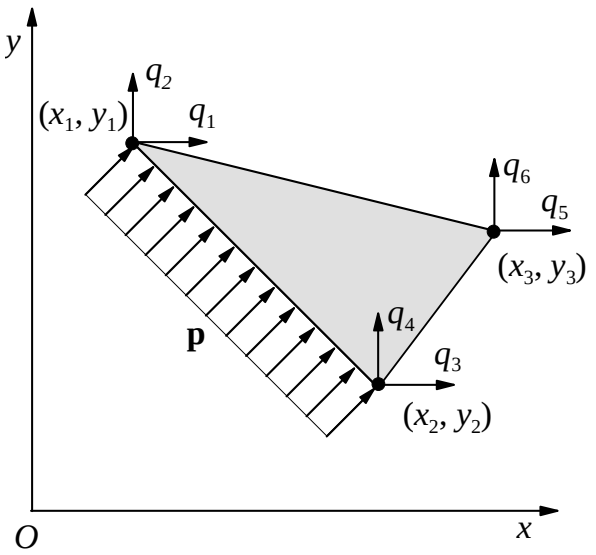
Esimerkki: Olkoon tilavuuskuormitus muotoa $f_y = -\rho g$. Sijoitetaan se edellä olevaan lausekkeeseen, jolloin

$$\mathbf{f}^V = \frac{\rho g\,t\,A}{3} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{mg}{3} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{23}$$

missä *m* on elementin massa.

Tasaisen reunapaineen aiheuttama ekvivalenttinen solmukuormitus

Tarkastellaan elementin reunaa solmulta 1 solmulle 2. Muut reunat (2-3 ja 3-1) menevät vastaavalla tavalla.



Elementille kohdistuu reunapaine, jonka komponentit globaalissa koordinaatistossa ovat $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_x & p_y \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$. Paine voidaan muuttaa viivakuormitukseksi kertomalla elementin paksuudella *t*. Kuormituksen potentiaali on

$$WP = -\int_s \mathbf{u}(s)^{\mathrm{T}} \mathbf{p}\, t\, ds = -\int_s \mathbf{u}(s)^{\mathrm{T}} \mathbf{r}\, ds = -\mathbf{q}^{\mathrm{T}} \int_s \mathbf{N}(s)^{\mathrm{T}} \mathbf{r}\, ds \tag{24}$$

missä integrointi ulotetaan reunaviivan 1-2 yli. Koska riittää kun interpolointi koskee vain reunaviivaa, niin sovitetaan viivalle yksiulotteinen interpolointi.

$$\mathbf{u}(\xi) = \begin{bmatrix} u_s \\ v_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1^s & 0 & N_2^s & 0 \\ 0 & N_1^s & 0 & N_2^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} = \mathbf{N}_s \mathbf{q}_s \tag{25}$$

missä reunaviivan interpolaatiofunktiot ovat $\xi \in [-1,1]$

$$N_1^s = \frac{1}{2}(1-\xi)$$
$$N_2^s = \frac{1}{2}(1+\xi) \tag{26}$$

Reunaviivan pituus on $l_s = \sqrt{x_{21}^2 + y_{21}^2}$, joten $ds = \frac{l_s}{2} d\xi$ ja potentiaali

$$WP = -\mathbf{q}^{\mathrm{T}} \frac{l_s}{2} \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (1-\xi) & 0 \\ 0 & (1-\xi) \\ (1+\xi) & 0 \\ 0 & (1+\xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \end{bmatrix} d\xi = -\mathbf{q}^{\mathrm{T}} \frac{l_s}{2} \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_x \\ r_y \end{bmatrix} \tag{27}$$

joten tasaisen reunapaineen aiheuttama ekvivalenttinen solmukuormitusvektori saadaan

$$\mathbf{f}^p = \frac{l_s}{2} \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_x \\ r_y \end{bmatrix} \tag{28}$$

Kuormituksen voimakomponentit sijoittelusummataan elementin vapausasteita $q_1 - q_4$ vastaaville globaalivapausasteille.

Lämpötilan muutoksen vaikutus

Mikäli elementin lämpötila muuttuu niin sanottuun referenssilämpötilaan verrattuna määrän ΔT, niin siitä aiheutuu tasojännitystilan elementtiin venymä $\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \begin{pmatrix} \alpha\,\Delta T & \alpha\,\Delta T & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$. Koska kiinnittämättömään elementtiin ei aiheudu lämpötilan muutoksesta jännityksiä, niin jännityksen lauseke on

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \mathbf{D}\left(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0\right) \tag{29}$$

Elementin kimmoenergian lauseke on nyt

$$\begin{aligned} U_e &= \frac{1}{2}\int_{V_e} \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0\right) dV = \frac{1}{2}\int_{V_e} \left(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{D}\left(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0\right) dV \\ &= \frac{1}{2}\int_{V_e} \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}\, dV - t\int_{A_e} \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_0\, dA + \frac{1}{2}\int_{V_e} \boldsymbol{\varepsilon}_0^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_0\, dx \\ &= \frac{1}{2}\mathbf{q}^{\mathrm{T}}\mathbf{k}_e\mathbf{q} - \mathbf{q}^{\mathrm{T}}\, t\, A\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_0 + U_e^{\theta} \end{aligned} \tag{30}$$

Huomataan, että viimeinen termi on vakio, jolloin se häviää derivoitaessa. Keskimmäinen termi voidaan lausua muodossa

$$-\mathbf{q}^{\mathrm{T}} t\, A\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_0 = -\mathbf{q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Theta}_e \tag{31}$$

missä vektoria

$$\boldsymbol{\Theta}_e = t\, A\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \begin{pmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \theta_4 & \theta_5 & \theta_6 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{32}$$

kutsutaan lämpötilan muutoksen aiheuttamaksi ekvivalenttiseksi solmukuormitusvektoriksi. Kaavassa α on pituuden lämpölaajenemiskerroin [1/K] tai [1/^{0}C] ja ΔT [K] tai [^{0}C] on lämpötilan muutos referenssilämpötilaan verrattuna.

Laskentamallin globaali solmukuormitusvektori F sijoittelusummataan vastaavasti kuin aiemmin on esitetty

$$\mathbf{F} = \mathbf{P} + \text{"}\sum_e \text{"}\left(\mathbf{f}_e^V + \boldsymbol{\Theta}_e + \mathbf{f}_e^p\right) \tag{33}$$

Annettu solmukuormitus

Kaksiulotteisilla elementeillä annettua solmukuormitusta P tulisi yleensä välttää, koska elementtijakoa tihennettäessä kuormitusalueen jännitykset nousevat suuriksi. Kuormitus tulisi korvata äärelliselle matkalle asetetulla painekuormituksella.