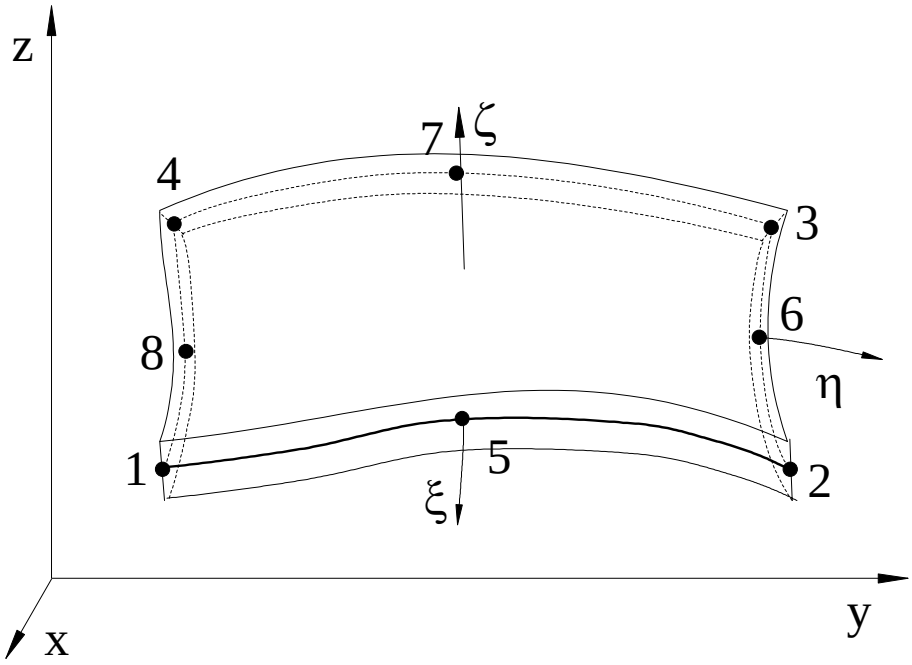
Kuorielementti

hum 12.11.13

Tämä esitys ei kuulu kurssivaatimuksiin, vaan se on tarkoitettu asiasta kiinnostuneille. Tarkastellaan tässä yhteydessä lineaarista 8-solmuista AIZ (Ahmad, Irons ja Zienkiewicz, 1970) kuorielementtiä, jonka kinematiikka on johdettu degeneroimalla solidielementistä.



Kuva 1. AIZ -kuorielementin solmunumerot ja emokoordinaatisto

Elementillä on kahdeksan solmua ja viisi lokaalia solmuvapausastetta, joista kolme ensimmäistä ovat siirtymät globaaliakseleiden suuntaan sekä kaksi rotaatiota α ja β, jotka mitataan kussakin solmussa erikseen määritetyssä ortonormeeratussa kannassa ($\mathbf{V}_{1i}$,$\mathbf{V}_{2i}$,$\mathbf{V}_{3i}$). Kantavektorit voidaan laskea seuraavasti:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r}_\xi &= \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi} \\
\mathbf{r}_\eta &= \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \eta} \\
\mathbf{V}_i^3 &= \left(l_{3i}, m_{3i}, n_{3i}\right)^T = \mathbf{r}_\xi \times \mathbf{r}_\eta / \left\|\mathbf{r}_\xi \times \mathbf{r}_\eta\right\| \\
\mathbf{V}_i^1 &= \mathbf{r}_\xi / \left\|\mathbf{r}_\xi\right\| \\
\mathbf{V}_i^2 &= \mathbf{V}_i^3 \times \mathbf{V}_i^1 / \left\|\mathbf{V}_i^3 \times \mathbf{V}_i^1\right\|
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Elementin muotofunktiot ovat

$$
\begin{aligned}
N_1 &= (1-\xi)(1-\eta)(-\xi-\eta-1)/4 \\
N_2 &= (1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1)/4 \\
N_3 &= (1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-1)/4 \\
N_4 &= (1-\xi)(1+\eta)(-\xi+\eta-1)/4 \\
N_5 &= (1-\xi^2)(1-\eta)/2 \\
N_6 &= (1+\xi)(1-\eta^2)/2 \\
N_7 &= (1-\xi^2)(1+\eta)/2 \\
N_8 &= (1-\xi)(1-\eta^2)/2
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Kuoren pisteiden paikkavektorit alkutilassa määritetään

$$
\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{8} N_i \mathbf{X}_i + \sum_{i=1}^{8} N_i \frac{t}{2} \zeta \mathbf{V}_i^3 \tag{3}
$$

missä t on kuoren paksuus. Kuoren pisteiden siirtymäkenttä vastaavasti on

$$
\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{8} N_i \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^{8} N_i \frac{\zeta}{2} t_i [\mu_i] \begin{bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{bmatrix} \tag{4}
$$

missä

$$
[\mu_i] = \begin{bmatrix} -l_{2i} & l_{1i} \\ -m_{2i} & m_{1i} \\ -n_{2i} & n_{1i} \end{bmatrix} \tag{5}
$$

Konstitutiiviset yhteydet

Olkoon kuoren kantavektoreiden määräämässä tasossa voimassa jännitysten ja venymien välinen lineaarinen yhteys

$$\begin{bmatrix} \sigma_{x'} \\ \sigma_{y'} \\ \sigma_{z'} \\ \tau_{x'y'} \\ \tau_{y'z'} \\ \tau_{x'z'} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{y'} \\ \varepsilon_{z'} \\ \gamma_{x'y'} \\ \gamma_{y'z'} \\ \gamma_{x'z'} \end{bmatrix} = \mathbf{D}_2^{'} \left\{ \varepsilon^{'} \right\} \tag{6}$$

Kierrettäessä neljännen kertaluvun kimmotensori globaalimittaukseen, sen matriisi muuntuu

$$\mathbf{D}_2 = \mathbf{T}_\varepsilon^{\mathrm{T}} \mathbf{D}_2^{'} \mathbf{T}_\varepsilon \tag{7}$$

missä kiertomatriisi

$$\mathbf{T}_\varepsilon = \begin{bmatrix} l_1^2 & m_1^2 & n_1^2 & l_1 m_1 & m_1 n_1 & l_1 n_1 \\ l_2^2 & m_2^2 & n_2^2 & l_2 m_2 & m_2 n_2 & l_2 n_2 \\ l_3^2 & m_3^2 & n_3^2 & l_3 m_3 & m_3 n_3 & l_3 n_3 \\ 2l_1 l_2 & 2m_1 m_2 & 2n_1 n_2 & l_1 m_2 + m_1 l_2 & m_1 n_2 + m_2 n_1 & l_2 n_1 + n_2 l_1 \\ 2l_2 l_3 & 2m_2 m_3 & 2n_2 n_3 & l_2 m_3 + m_2 l_3 & m_2 n_3 + m_3 n_2 & l_3 n_2 + n_3 l_2 \\ 2l_3 l_1 & 2m_3 m_1 & 2n_3 n_1 & l_3 m_1 + m_3 l_1 & m_3 n_1 + m_1 n_3 & l_1 n_3 + n_1 l_3 \end{bmatrix} \tag{8}$$

muodostuu kantavektoreiden $\mathbf{V}^{\mathrm{i}}$ komponenteista. Matriisi muodostetaan erikseen jokaisessa integrointipisteessä käyttäen solmujen kantavektoreista muotofunktioilla interpoloituja kantavektoreita.

$$\mathbf{V}^i = \sum_{j=1}^{8} N_j \mathbf{V}_j^i \tag{9}$$

Lähtien siirtymien ja venymien välisestä linearisoidusta yhteydestä, saadaan kuoren siirtymien ja venymien välille kinemaattinen matriisi **B**. Kinemaattinen matriisi voidaan osittaa kahteen osaan $\mathbf{B}_0$ ja $\mathbf{B}_1$ joista edellinen ei muutu kuoren paksuussuunnassa. Solmua i edustava osamatriisi on

$$\mathbf{B}_{0i} = \begin{bmatrix} a_i & 0 & 0 & \frac{1}{2} d_i t_i \mu_{i11} & \frac{1}{2} d_i t_i \mu_{i12} \\ 0 & b_i & 0 & \frac{1}{2} e_i t_i \mu_{i21} & \frac{1}{2} e_i t_i \mu_{i22} \\ 0 & 0 & c_i & \frac{1}{2} f_i t_i \mu_{i31} & \frac{1}{2} f_i t_i \mu_{i32} \\ b_i & a_i & 0 & \frac{1}{2}\left(e_i t_i \mu_{i11} + d_i t_i \mu_{i21}\right) & \frac{1}{2}\left(e_i t_i \mu_{i12} + d_i t_i \mu_{i22}\right) \\ 0 & c_i & b_i & \frac{1}{2}\left(f_i t_i \mu_{i21} + e_i t_i \mu_{i31}\right) & \frac{1}{2}\left(f_i t_i \mu_{i22} + e_i t_i \mu_{i32}\right) \\ c_i & 0 & a_i & \frac{1}{2}\left(f_i t_i \mu_{i11} + d_i t_i \mu_{i31}\right) & \frac{1}{2}\left(f_i t_i \mu_{i12} + d_i t_i \mu_{i32}\right) \end{bmatrix} \tag{10}$$

ja vastaavasti paksuussuunnassa muuttuva osamatriisi

$$\mathbf{B}_{1i} = \frac{1}{2} t_i \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a_i \mu_{i11} & a_i \mu_{i12} \\ 0 & 0 & 0 & b_i \mu_{i21} & b_i \mu_{i22} \\ 0 & 0 & 0 & c_i \mu_{i31} & c_i \mu_{i32} \\ 0 & 0 & 0 & a_i \mu_{i21} + b_i \mu_{i11} & a_i \mu_{i22} + b_i \mu_{i12} \\ 0 & 0 & 0 & b_i \mu_{i31} + c_i \mu_{i21} & b_i \mu_{i32} + c_i \mu_{i22} \\ 0 & 0 & 0 & a_i \mu_{i31} + c_i \mu_{i11} & a_i \mu_{i32} + c_i \mu_{i12} \end{bmatrix} \tag{11}$$

jossa on käytetty lyhennysmerkintöjä

$$\begin{aligned} N_{i,x} &= J_{11}^{-1} N_{i,\xi} + J_{12}^{-1} N_{i,\eta} = a_i \\ N_{i,y} &= J_{21}^{-1} N_{i,\xi} + J_{22}^{-1} N_{i,\eta} = b_i \\ N_{i,z} &= J_{31}^{-1} N_{i,\xi} + J_{32}^{-1} N_{i,\eta} = c_i \\ \left(N_i \zeta\right)_{,x} &= a_i \zeta + N_i J_{13}^{-1} = a_i \zeta + d_i \\ \left(N_i \zeta\right)_{,y} &= b_i \zeta + N_i J_{23}^{-1} = b_i \zeta + e_i \\ \left(N_i \zeta\right)_{,z} &= c_i \zeta + N_i J_{33}^{-1} = c_i \zeta + f_i \end{aligned} \tag{12}$$

ja t_i on kuoren paksuuden solmuarvo. Kuoren jäykkyysmatriisi

$$\mathbf{k}_{40x40} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \mathbf{B}^T \mathbf{D}_2 \mathbf{B} \det \mathbf{J} \, d\xi \, d\eta \, d\zeta \tag{13}$$

voidaan integroida paksuussuunnassa analyyttisesti olettaen, että Jacobin matriisi ei muutu tässä suunnassa. Jäykkyysmatriisin lausekkeessa

$$\begin{aligned} &\mathbf{B}^{\mathrm{T}} \mathbf{D}_2 \mathbf{B} = \left[\mathbf{B}_0 + \zeta \, \mathbf{B}_1\right]^{\mathrm{T}} \mathbf{D}_2 \left[\mathbf{B}_0 + \zeta \, \mathbf{B}_1\right] = \\ &\mathbf{B}_0{}^{\mathrm{T}} \mathbf{D}_2 \mathbf{B}_0 + \zeta \mathbf{B}_1^{\mathrm{T}} \mathbf{D}_2 \mathbf{B}_0 + \zeta \mathbf{B}_0^{\mathrm{T}} \mathbf{D}_2 \mathbf{B}_1 + \zeta^2 \mathbf{B}_1^{\mathrm{T}} \mathbf{D}_2 \mathbf{B}_1 \end{aligned} \tag{14}$$

joten integroimalla paksuussuunnassa jäykkyysmatriisin lausekkeeksi saadaan

$$\mathbf{k} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left(\mathbf{B}_0^{\mathrm{T}} \mathbf{D}_2 \mathbf{B}_0 + \frac{1}{3} \mathbf{B}_1^{\mathrm{T}} \mathbf{D}_2 \mathbf{B}_1 \right) t \left\| \mathbf{e}_\xi \times \mathbf{e}_\eta \right\| d\xi \, d\eta \tag{15}$$

Saatu jäykkyysmatriisi tulee vielä kiertää rotaatiovapausasteiden osalta globaalimittaukseen käyttäen yhteyttä

$$\begin{Bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{1i} & m_{1i} & n_{1i} \\ l_{2i} & m_{2i} & n_{2i} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \\ \theta_{zi} \end{Bmatrix} \tag{16}$$

Näin laskettu jäykkyysmatriisi ei ota huomioon kuoren tasoa vastaan kohtisuoraa rotaatiojäykkyyttä. Jotta vältytään koko rakenteen singulaariselta jäykkyysmatriisilta voidaan rotaatiojäykkyys lisätä elementille asettamalla elementin muuhun jäykkyyteen verrattuna pieni tasoa vastaan kohtisuora rotaatiojäykkyys, joka muunnetaan globaalimittaukseen ja summataan edellä laskettuun jäykkyysmatriisiin.

Massamatriisi

Lähtien kuoren nopeuskentän interpolaatiosta, joka saadaan yhtälön (4) aikaderivaatasta kuoren massamatriisin lauseke saadaan muotoon

$$\mathbf{m} = \int_V \left(\mathbf{N}_p + \zeta \mathbf{N}_b\right)^{\mathrm{T}} \rho \left(\mathbf{N}_p + \zeta \mathbf{N}_b\right) dV \tag{17}$$

Lauseke (17) voidaan palauttaa, vastaavasti kuin jäykkyysmatriisin lauseke, pintaintegraaliksi ja edelleen kiertää globaalimittaukseen rotaatiovapausasteiden osalta. Saadulla massamatriisilla on nollahitaus kuoren tasoa vastaan kohtisuoraan olevien rotaatioiden suhteen ja se tulee tarvittaessa huomioida. Integroinnit kannattaa suorittaa Gaussin integroinnilla käyttäen 2 x 2 pisteen näytteenottoa.