

Johdatus materiaalimalleihin

6. harjoitus – poikittaisisotrooppinen materiaalimalli

1. Olkoon \mathbf{A} symmetrinen toisen kertaluvun tensori ja \mathbf{m} vektori. Näytä, että invariantti $I_4 = \mathbf{m}^T \mathbf{A} \mathbf{m} = m_i A_{ij} m_j$ voidaan kirjoittaa myös muodossa $I_4 = \text{tr}(\mathbf{A} \mathbf{M})$, jossa $\mathbf{M} = \mathbf{m} \mathbf{m}^T$, komponenttimuodossa $M_{ij} = m_i m_j$.
2. Kuten edellisessä tehtävässä \mathbf{A} on symmetrinen toisen kertaluvun tensori ja $\mathbf{M} = \mathbf{m} \mathbf{m}^T$ rakennetensori jossa \mathbf{m} on yksikkövektori. Yksikkövektorin \mathbf{m} ja tensorin \mathbf{A} muodostamaan invarianttikantaan voidaan valita jäsenet

$$I_1 = \text{tr} \mathbf{A}, \quad I_2 = \frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{A}^2), \quad I_3 = \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{A}^3), \quad I_4 = \text{tr}(\mathbf{A} \mathbf{M}), \quad I_5 = \text{tr}(\mathbf{A}^2 \mathbf{M}). \quad (1)$$

Näytä, että invariantti $\tilde{I} = \text{tr}(\mathbf{A}^3 \mathbf{M})$ voidaan lausua kannan (1) avulla.

Vihje. Käytä hyväksi Cayley-Hamiltonin teoreemaa, eli tensori itse toteuttaa oman karakteristisen polynominsa

$$-\lambda^3 + \hat{I}_1 \lambda^2 + \hat{I}_2 \lambda + \hat{I}_3 = 0,$$

jossa \hat{I}_i ovat tensorin \mathbf{A} pääinvariantit:

$$\hat{I}_1 = \text{tr} \mathbf{A}, \quad \hat{I}_2 = \frac{1}{2} [\text{tr}(\mathbf{A}^2) - (\text{tr} \mathbf{A})^2], \quad \hat{I}_3 = \det \mathbf{A}.$$

3. Tarkastellaan yhteen suuntaan kuituvahvistettua materiaalia. Oletetaan yksinkertaisuuden vuoksi kuitujen olevan poikkileikkaukseltaan neliöitä, joiden svumitta on $2b$. Kuidut ovat säännöllisessä neliöhilassa ja kuitujen välimatka (keskiömitta) on $2a$. Yhden kuidun pinta-ala on siten $A_f = 4b^2$ ja edustavan pinta-alkion pinta-ala $A_r = 4a^2$. Sekä kuitujen että matriisin materiaali otaksutaan isotrooppiseksi ja joiden kimmovakiot ovat E_f, ν_f ja vastaavasti E_m, ν_m . Kuitujen tilavuusuhdetta merkitään $f = (b/a)^2$ (sama kuin pinta-alasuhde). Määritä arvio poikittaisisotrooppisen aineen ainevakioille E_L, E_T, G_L, ν_L ja ν_T lausuttuna kuitujen ja matriisin kimmovakioiden sekä tilavuusosuuden avulla.

Vihje. Tarkastele kuutiomaista edustavaa tilavuusalkiota ja/tai sen neljäsosaa. Aseta joko vakiojännitys tai vakiovenymätila vaikuttamaan tilavuusalkioon sopivissa suunnissa ja laske tästä keskimääräiset suureet. Esimerkiksi asettamalla pitkittäis-suunnassa vakiovenymä laske edustavaan pinta-alkioon kohdistuva voima. Keskimääräinen jännitys saadaan siten jakamalla edustavan pinta-alkion pinta-alalla.

4. Poikittaisisotrooppisen (transversaali isotrooppisen) grafiitti-epoksi laminaattilevyn materiaalikertoimet ovat poikittaisessa isotropiatasossa $E_T = 9,65$ GPa, sekä Poissonin vakio $\nu_T = 0,6$ ja pitkittäisessä suunnassa $E_L = 148$ GPa, $G_L = 4,55$ GPa, sekä $\nu_L = 0,3$. Tutki onko annettu materiaalikertoiminen joukko käypä.