Johdatus materiaalimalleihin

5. harjoitus – kimmoinen isotrooppinen materiaalimalli

1. Lineaarisen kimmoisan isotrooppisen materiaalin muodonmuutosenergia (yksikkötilavuutta kohti) W voidaan kirjoittaa seuraavissa ekvivalenteissa muodoissa:

$$
\begin{aligned}
W_1 &= \tfrac{1}{2}a_1 I_1^2 + b_1 I_2,\\
W_2 &= \tfrac{1}{2}a_2 I_1^2 + b_2 J_2,\\
W_3 &= \tfrac{1}{2}a_3 I_1^2 + b_3 \tilde{I}_2,
\end{aligned}
$$

jossa I_1, I_2 ovat infinitesimaalisen muodonmuutostensorin pääinvariantit, $I_1 = \operatorname{tr}\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_{kk}, I_2 = \frac{1}{2}(\operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^2) - I_1^2)$ ja J_2 on deviatorisen muodonmuutostensorin $\mathbf{e} = \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{3}I_1\mathbf{I}$ toinen invariantti $J_2 = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(\mathbf{e}^2)$ ja $\tilde{I}_2$ on geneerinen invariantti $\tilde{I}_2 = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^2)$.

Määritä vakiot a_i, b_i Lamén parametrien $\lambda, \mu = G$ sekä vaihtoehtoisesti kimmo-, leikkaus- ja kokoonpuristuvuusmoduulin E, G ja K avulla.

2. Yleisin mahdollinen kimmoinen isotrooppinen materiaalimalli on muotoa

$$\boldsymbol{\sigma} = a_0\mathbf{I} + a_1\boldsymbol{\varepsilon} + a_2\boldsymbol{\varepsilon}^2,$$

jossa kertoimet a_i voivat riippua muodonmuutostensorin $\boldsymbol{\varepsilon}$ invarianteista. Muodonmuutosenergia$W$ yksikkötilavuutta kohden voidaan kirjoittaa muodonmutostensorin $\boldsymbol{\varepsilon}$ ja sen deviaattorin $\mathbf{e}$ invarianttien I_1, J_2 ja $J_3 = \det\mathbf{e}$ funktiona

$$W = W(I_1, J_2, J_3).$$

(a) Määritä kertoimet a_i lausuttuna W:n derivaattojen avulla.

(b) Jotta materiaalimalli voitaisiin kirjoittaa muodossa $\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$ on oltava $a_2 \equiv 0$. Muotoile epälineaarinen isotrooppinen konstitutiivinen yhteys käyttäen hyväksi kokoonpuristuvuusmoduulia K ja leikkausmoduulia G, jotka ovat invarianttien I_1 ja J_2 funktioita

$$K = K(I_1, J_2) \qquad \text{ja} \qquad G = G(I_1, J_2).$$

Jotta malli olisi hyperelastinen, funktiot K ja G eivät voi ola riippumattomia. Johda ehdot, jotka niiden on toteutettava.

(c) Metallien käyttäytymiselle hyvä approksimaatio on olettaa tilavuudenmuutoksen käyttäytyvän lineaarisesti ja leikkausmoduuli riippuvaksi vain muodonmutosdeviaattorin toisesta invariantista. Tällöin tilavuudenmuutos ja deviatorinen käyttäytyminen ovat toisistaan riippumattomia. Oletetaan leikkausmoduulille riippuvuus

$$G(J_2) = G_0(1 + \alpha J_2),$$

jossa α on dimensioton materiaalivakio. Määritä tälläisen mallin muodonmuutosenergiafunktio W. Määritä ja piirrä myös jännitys-venymä käyttäytyminen yksiakselisessa vedossa erilaisilla α:n arvoilla.

Vihje: Mikäli toisen kertaluvun tensori $\mathbf{A}$ on deviatorinen, eli $\operatorname{tr}\mathbf{A} = 0$, tällöin $J_3 = \det\mathbf{A} = \frac{1}{3}\operatorname{tr}(\mathbf{A}^3)$.