

Università degli Studi di Milano
Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

PIASTRELLAMENTI DI SPAZI DI BANACH

Relatore: Prof. Clemente ZANCO
Correlatore: Prof. Libor VESELY

Tesi di Laurea di
Alessandro FOI
Matricola 505091

Anno Accademico 2000-2001

Indice

Introduzione	iii
Simbologia, notazioni e convenzioni	vii
1 Proprietà generali	1
1.1 Piastrellamenti e singolarità	1
1.2 Piastrellamenti e caratteri cardinali	4
1.3 Singolarità e caratteri cardinali	9
2 Piastrellamenti limitati notevoli	17
2.1 Piastrellamenti reticolari	17
2.2 Piastrellamenti e spazi poliedrali	19
2.3 Piastrellamento universale	27
2.4 Piastrellamenti equilimitati: RNP	32
2.5 Piastrellamenti equilimitati: UC	36
3 Piastrellamenti speciali	45
3.1 Proiezioni metriche, insiemi prossimali discreti e diagrammi di Voronoi	45
3.2 Il piastrellamento di Klee	52
3.3 Piastrellamento stellato localmente finito	57
Bibliografia	61

Introduzione

Per *corpo* in uno spazio normato X si intende un sottoinsieme di X connesso e non vuoto che sia la chiusura del proprio interno. Per *piastrellamento* di X si intende un ricoprimento \mathcal{T} non banale di X mediante corpi (*piastrelle*) aventi interni a due a due disgiunti. \mathcal{T} è detto limitato o convesso se ogni membro di \mathcal{T} gode della corrispondente proprietà.

Lo studio dei piastrellamenti ha ricevuto nel corso degli anni notevole attenzione negli spazi finito-dimensionali e particolarmente nel piano, dove addirittura può essere fatto risalire all'antichità. Una trattazione esauriente (e visivamente molto piacevole) della teoria dei piastrellamenti nel piano è lo splendido libro di Grünbaum e Shephard [GS]. Per gli spazi infinito-dimensionali invece, la teoria attualmente disponibile è ancora piuttosto rudimentale: essa si è sviluppata solo a partire dagli anni '80 in seguito ai primi risultati ottenuti da V. Klee ([K3] e [K4]) ed è di natura fondamentalmente topologica e/o analitica (viceversa, nel contesto finito-dimensionale, l'approccio è essenzialmente geometrico e/o combinatorio).

In questa tesi viene fornito, prima di tutto, lo stato dell'arte della teoria dei piastrellamenti nell'ambito infinito-dimensionale e vengono poi illustrati i più significativi esempi, attualmente disponibili, di piastrellamenti di spazi di Banach.

La tesi si articola in tre capitoli.

Nel primo capitolo vengono esposti i concetti rilevanti su cui è basata la teoria generale (in ottica infinito-dimensionale) con particolare riferimento allo studio delle singolarità, cioè dell'insieme dei punti dello spazio in ogni intorno di ciascuno dei quali cadono infinite piastrelle. Filo conduttore della trattazione risulta essere l'esame di alcuni parametri (*caratteri cardinali*), relativi agli spazi normati, che misurano in termini di cardinalità la "consistenza" dello spazio da diversi punti di vista (topologico, lineare, ecc.). In questo capitolo non vengono prese in esame costruzioni specifiche o situazioni particolari, che sono invece oggetto dei capitoli successivi.

Il secondo capitolo è destinato all'esposizione di opportune tecniche per la costruzione di piastrellamenti limitati. Esse, naturali e spontanee in dimensione finita, possono essere estese in ambito infinito-dimensionale consentendo la costruzione di quelli che in pratica, a tutt'oggi, sono i principali piastrellamenti disponibili nel generico spazio normato. Questi piastrellamenti fondamentalmente ereditano le proprietà metriche e topologiche presenti in ambito finito-dimensionale. In particolare viene descritta la tecnica con la quale nel 1997 V. Fonf, A. Pezzotta e C. Zanco hanno assicurato l'esistenza, in ogni spazio normato, di piastrellamenti limitati convessi e uniformemente limitati dal basso (ma non dall'alto). Viene lasciato così aperto il problema dell'esistenza, in situazioni generali, di piastrellamenti equilimitati, i quali risultano, anche per eventuali applicazioni alla teoria dell'interpolazione astratta, i più significativi. Nell'ultimo paragrafo di questo capitolo viene data soluzione positiva a tale problema limitatamente agli spazi uniformemente convessi: è questo uno dei principali contributi originali della tesi.

Nel terzo ed ultimo capitolo vengono illustrati speciali piastrellamenti in

situazioni specifiche. La tecnica utilizzata consiste nel generare, tramite la proiezione metrica su un opportuno insieme prossimale discreto, un piastrellamento i cui membri sono celle di Voronoi. Questi, dovuti a Klee, sono storicamente i primi esempi significativi di piastrellamenti in ambito infinito-dimensionale e presentano caratteristiche e comportamenti inaspettati e non riscontrabili negli spazi finito-dimensionali. In particolare viene documentata l'esistenza, in opportuni spazi non separabili, di piastrellamenti con piastrelle a due a due disgiunte; tale costruzione ha consentito di ottenere nel 1981 il primo, e a tutt'oggi sostanzialmente unico, esempio noto di insieme di Chebyshev discreto.

Oltre al contributo fornito nell'ultimo paragrafo del secondo capitolo, cui si è accennato sopra, sono originali alcuni dettagli, relativi all'analisi dei piastrellamenti reticolari e degli spazi poliedrali, esposti nei primi due paragrafi dello stesso capitolo.

Simbologia, notazioni e convenzioni

Gli spazi vettoriali (topologici o normati) coinvolti nella presente trattazione sono da considerarsi tutti sul campo reale. Con \mathbb{R} , \mathbb{N} e \mathbb{Z} indicheremo rispettivamente l'insieme dei numeri reali, degli interi naturali e degli interi relativi.

Un generico spazio normato verrà sempre denotato con $(X, \|\cdot\|)$, oppure, ove non vi sia ambiguità, semplicemente con X . In X , $B(X)$ indica la palla chiusa centrata nell'origine di raggio uno (brevemente *palla unitaria*), ovvero

$$B(X) = \{x \in X : \|x\| \leq 1\},$$

mentre $S(X)$ la frontiera di tale palla (*sfera unitaria*). $B(x, r)$ è invece la generica palla chiusa centrata nel punto $x \in X$ e di raggio r :

$$B(x, r) = \{y \in X : \|x - y\| \leq r\} = x + rB(X).$$

Analogamente, la generica sfera centrata in $x \in X$ e di raggio r sarà

$$S(x, r) = \{y \in X : \|x - y\| = r\}.$$

La dimensione (algebrica) di uno spazio vettoriale X (cioè la cardinalità di ogni base algebrica di X) viene indicata con $\dim X$. Se Y è un sottospazio

di X , $\text{codim } Y$ denota la codimensione di Y in X , ovvero la dimensione dello spazio quoziente X/Y .

Assegnato uno spazio di Banach X , X^* è lo spazio di Banach duale topologico di X dotato della norma usuale (norma di un funzionale lineare continuo è la sua miglior costante di Lipschitz). Ove non vi sia possibilità di confusione, utilizzeremo lo stesso simbolo per la norma di uno spazio e del suo duale.

Quando A è un sottoinsieme di uno spazio topologico X , $\text{int } A$, \overline{A} e $\text{bdy } A$ denotano rispettivamente l'interno, la chiusura e la frontiera di A . Con $\text{int}_B A$ si intenderà l'interno di A relativamente a B , ove $B \subset X$. Se X possiede una struttura vettoriale (in particolare quando X è uno spazio normato) indicheremo con $\text{co } A$ l'involucro convesso di A e con $\text{span } A$ lo *span* lineare di A :

$$\text{co } A = \{z \in X : z = \lambda x + (1 - \lambda)y, \ x, y \in A, \ \lambda \in [0, 1] \subset \mathbb{R}\}$$

$$\text{span } A = \{z \in X : z = \lambda x + \mu y, \ x, y \in A, \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

Scelti due punti x e y in uno spazio vettoriale, il segmento di estremi x e y sarà, come sempre, $[x, y] = \text{co } \{x, y\}$.

Un punto di un sottoinsieme convesso A di uno spazio vettoriale si dice *estremo* se non è contenuto internamente ad alcun segmento avente estremi in A . L'insieme, eventualmente vuoto, di tutti i punti estremi di A verrà indicato con $\text{ext } A$.

Se A e B sono due sottoinsiemi di uno spazio metrico, denoteremo con $\text{dist}(A, B)$ la distanza tra A e B , ovvero

$$\text{dist}(A, B) = \inf_{a \in A, b \in B} d(a, b)$$

(naturalmente $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ è la distanza che definisce la metrica dello

spazio). Quando $A = \{a\}$ è un singolo porremo per semplicità

$$\text{dist}(a, B) = \text{dist}(\{a\}, B).$$

Il diametro di un sottoinsieme A di uno spazio metrico, $\text{diam } A$, è il $\sup_{a,b \in A} d(a, b)$.

Se \mathcal{C} è una famiglia di insiemi, con $\cup \mathcal{C}$ denoteremo l'insieme ottenuto mediante l'unione di tutti gli insiemi che costituiscono \mathcal{C} , ovvero $\cup \mathcal{C} = \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C$.

Per un generico insieme A , indicheremo con $\text{card } A$ la cardinalità di A .

Infine, se $r \in \mathbb{R}$, denoteremo con $[r]$ la parte intera di r , cioè il più grande intero minore o uguale ad r .

Capitolo 1

Proprietà generali

1.1 Piastrellamenti e singolarità

Definizione 1.1.1 *Un sottoinsieme proprio C non vuoto e connesso di uno spazio topologico è detto corpo se $\text{int } C \neq \emptyset$ e $C = \overline{\text{int } C}$.*

Definizione 1.1.2 *Una famiglia \mathcal{C} di sottoinsiemi di uno spazio topologico X è un ricoprimento di (o per) X se $X = \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C$.*

Definizione 1.1.3 *Un ricoprimento \mathcal{T} è un piastrellamento se ogni elemento T di \mathcal{T} è un corpo e per ogni coppia di elementi distinti T_α e T_β si ha che $\text{int } T_\alpha \cap \text{int } T_\beta = \emptyset$.*

Chiameremo *piastrelle* gli elementi di un piastrellamento. Un ricoprimento viene detto chiuso, limitato, convesso, liscio, ecc. se ogni suo membro gode della corrispondente proprietà (che ovviamente si suppone possa essere considerata nello spazio ambiente).

Definizione 1.1.4 *Un ricoprimento \mathcal{C} è detto semplice se ogni punto dello spazio appartiene ad un solo elemento di \mathcal{C} .*

Definizione 1.1.5 *Un ricoprimento \mathcal{C} è detto puntualmente finito se ogni punto dello spazio appartiene ad al più un numero finito di elementi di \mathcal{C} .*

Definizione 1.1.6 *Un ricoprimento \mathcal{C} è detto localmente finito se per ogni punto esiste un suo intorno che interseca al più un numero finito di elementi di \mathcal{C} .*

Definizione 1.1.7 *Sia \mathcal{C} un ricoprimento e n un numero cardinale. Un punto è detto punto n -singolare per \mathcal{C} se ogni suo intorno interseca almeno n membri distinti di \mathcal{C} . Per non appesantire il linguaggio, tralascieremo di specificare a quale piastrellamento ci si riferisce dicendo solo punto n -singolare. Punti \aleph_0 -singolari verranno semplicemente detti punti singolari.*

È ovvio che un piastrellamento è localmente finito se e solo se non esistono punti singolari (per esso).

L'esistenza di piastrellamenti convessi limitati localmente finiti è fortemente ristretta dal seguente teorema ([C]).

Teorema 1.1.8 (Corson, 1960) *Sia X uno spazio di Banach riflessivo infinito-dimensionale e \mathcal{C} un ricoprimento di X convesso e limitato. Allora \mathcal{C} non è localmente finito.*

Solitamente l'insieme di tutti i punti singolari per \mathcal{C} viene indicato con $S(\mathcal{C})$. È possibile assegnare ad ogni x di $S(\mathcal{C})$ un valore $i(x) \in \{0, 1, 2, \dots, \infty\}$, nel modo seguente.

Definizione 1.1.9 *Sia $x \in S(\mathcal{C})$. Chiamiamo indice di x il valore $i(x) \in \{0, 1, 2, \dots, \infty\}$ così assegnato:*

$$i(x) = \left\{ \begin{array}{l} 0 \iff x \text{ appartiene ad infiniti elementi di } \mathcal{C} \\ n \iff n \text{ è il più piccolo intero tale che esista una varietà} \\ \quad \text{affine } n\text{-dimensionale } F \text{ con } x \in S(\{C \cap F, C \in \mathcal{C}\}) \\ \infty \text{ altrimenti} \end{array} \right\}.$$

In termini qualitativi, $i(x)$ è il numero delle “dimensioni necessarie per vedere la singolarità” di x . Il concetto di indice di un punto singolare è stato introdotto nel 1989 da M.J. Nielsen ed a lui sono dovuti anche i prossimi due risultati di cui non riporteremo le dimostrazioni (esse si trovano in [Ni]).

Teorema 1.1.10 *Sia \mathcal{T} un piastrellamento convesso per uno spazio vettoriale topologico X . Allora per ogni $x \in S(\mathcal{T})$ si ha che $i(x) \in \{0, 1, 2, \infty\}$.*

Teorema 1.1.11 *Sia \mathcal{T} un piastrellamento convesso per uno spazio vettoriale topologico X normabile e di seconda categoria in sé. Allora per ogni $x \in S(\mathcal{T})$ si ha che $i(x) \in \{0, 1, 2\}$.*

Corollario 1.1.12 *Sia \mathcal{T} un piastrellamento convesso per uno spazio di Banach X . Allora per ogni $x \in S(\mathcal{T})$ si ha che $i(x) \in \{0, 1, 2\}$.*

Un ulteriore concetto che si rivela utile all’analisi delle singolarità di un ricoprimento è il seguente.

Definizione 1.1.13 *Un ricoprimento \mathcal{C} è protettivo se per ogni punto $x \in X$ si ha che $x \in \text{int} \bigcup \{C \in \mathcal{C} : x \in C\}$.*

Teorema 1.1.14 *Ogni ricoprimento chiuso localmente finito è protettivo.*

Teorema 1.1.15 *Un piastrellamento è localmente finito se e solo se è protettivo e puntualmente finito.*

Teorema 1.1.16 *Ogni piastrellamento convesso e protettivo di \mathbb{R}^n è localmente finito.*

Per una dimostrazione di questi ultimi teoremi si veda [K4].

1.2 Piastrellamenti e caratteri cardinali

Scopo di questo paragrafo è fornire alcuni risultati che diano una stima della cardinalità di un ricoprimento (ed in particolare di un piastrellamento) a partire da particolari proprietà godute da tutti o alcuni dei suoi membri.

Sia X uno spazio normato.

Definizione 1.2.1 *Sia $0 < \alpha \leq 1$. Un sottoinsieme A della sfera del duale topologico $S(X^*)$ è detto α -normante per X se*

$$\sup \{|f(x)| : f \in A\} \geq \alpha \|x\| \quad x \in X.$$

Quando non sarà essenziale specificare α , un insieme α -normante verrà semplicemente detto insieme normante.

Definizione 1.2.2 *Un sottoinsieme W di X^* è detto totale su X quando se $f(x) = 0$ per ogni $f \in W$ allora $x = 0$ (i.e. $\forall x \in S(X) \exists f \in W : f(x) \neq 0$).*

Ovviamente un insieme normante è anche totale, infatti se W è α -normante si ha che

$$\forall x \in S(X) \exists f \in W \subseteq S(X^*) : f(x) \geq \alpha > 0.$$

Per rendere l'idea, si potrebbe dire che un insieme normante per X è un insieme “uniformemente” totale su X .

I seguenti parametri vengono detti *caratteri cardinali*; essi giocheranno un ruolo fondamentale nello studio dei piastrellamenti (specialmente quelli convessi) degli spazi normati.

Definizione 1.2.3 *Il carattere di totalità di X , $\text{tot}(X)$, è il più piccolo cardinale c tale per cui esista un insieme di cardinalità c totale su X .*

Definizione 1.2.4 *Il carattere normante di X , $\text{norm}(X)$, è il più piccolo cardinale c tale per cui esista un insieme di cardinalità c normante per X .*

Definizione 1.2.5 Il carattere di densità di X , $\text{dens}(X)$, è il più piccolo cardinale c tale per cui esista un insieme di cardinalità c denso in X .

A volte, $\text{dens } X$ viene detta “dimensione topologica di X ”.

Definizione 1.2.6 Il carattere di densità debole* di X^* , $w^*\text{-dens}(X^*)$, è il più piccolo cardinale c tale per cui esista un insieme di cardinalità c w^* -denso in X^* .

Denotando con \hat{X} il completamento di X valgono le seguenti relazioni:

$$w^*\text{-dens}(X^*) = \text{tot}(X) \leq \text{tot}(\hat{X}) \leq \text{norm}(X) \leq \text{dens}(X) \leq \text{dens}(X^*).$$

Se \mathcal{T} è un piastrellamento per lo spazio normato X , banalmente si ha che $\text{card } \mathcal{T} \leq \text{dens}(X)$. Vi sono inoltre esempi più che ovvi di piastrellamenti limitati non convessi (corone sferiche centrate nell’origine) o convessi illimitati (controimmagini tramite uno stesso funzionale continuo non nullo degli intervalli $[k, k + 1]$ per $k \in \mathbb{Z}$) aventi cardinalità numerabile.

La seguente proposizione risulterà fondamentale per i nostri scopi. Ricordiamo che un sottoinsieme D di uno spazio metrico si dice δ -separato se esiste una costante positiva δ tale per cui, per ogni $d_\gamma \in D$,

$$\delta \leq \inf_{d_\zeta \in D \setminus \{d_\gamma\}} d(d_\gamma, d_\zeta) = \text{dist}(d_\gamma, D \setminus \{d_\gamma\}).$$

Proposizione 1.2.7 In ogni spazio normato X esiste un insieme δ -separato D con $\text{card } D = \text{dens}(X)$.

Osservazione 1.2.8 Ovviamente se D è un insieme δ -separato si deve avere $\text{card } D \leq \text{dens}(X)$. Infatti se $\overline{E} = X$ ad ogni elemento $d_\gamma \in D$ si può associare un elemento e_γ in E tale che $d(d_\gamma, e_\gamma) < \frac{\delta}{2}$; se $d_\gamma \neq d_\zeta$ anche $e_\gamma \neq e_\zeta$ e quindi $\text{card } D \leq \text{card } E$.

Dim. La famiglia dei sottoinsiemi δ -separati di X è parzialmente ordinata rispetto all'inclusione insiemistica. Sia $D \subset X$ un sottoinsieme massimale rispetto al fatto di essere δ -separato (la cui esistenza è garantita dal lemma di Zorn). Naturalmente $\text{card } D \geq \aleph_0$. Per ogni $x \in X$ si deve avere che $\text{dist}(x, D) \leq \delta$ altrimenti $x \cup D$ sarebbe δ -separato e $D \subsetneq x \cup D$. Allora $\frac{1}{n}D$ è $\frac{\delta}{n}$ -separato e $\text{dist}(x, \frac{1}{n}D) \leq \frac{\delta}{n}$ e quindi l'insieme $K = \bigcup_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}D$ è denso in X . Ma $\text{card } D = \text{card } K \geq \text{dens}(X)$. ■

Teorema 1.2.9 *Se \mathcal{T} è un piastrellamento equilimitato, ovvero*

$$\sup \{ \text{diam}(T) : T \in \mathcal{T} \} = \alpha < \infty,$$

allora $\text{card } \mathcal{T} = \text{dens}(X)$.

Dim. Se il piastrellamento è equilimitato nessuna coppia di elementi distinti di un qualsiasi sottoinsieme 2α -separato di X può essere contenuta in un'unica piastrella (il cui diametro sia minore o uguale ad α). ■

Osservazione 1.2.10 L'osservazione 1.2.8 rimane valida anche quando, al posto di un sottoinsieme δ -separato, si considera più in generale un sottoinsieme discreto. Infatti, se D è discreto, per ogni $d_\gamma \in D$ si deve avere che

$$\delta_\gamma = \inf_{d_\zeta \in D \setminus \{d_\gamma\}} d(d_\gamma, d_\zeta) = \text{dist}(d_\gamma, D \setminus \{d_\gamma\}) > 0.$$

Associamo ad ogni $d_\gamma \in D$ un elemento e_γ dell'insieme denso E tale per cui

$$d(d_\gamma, e_\gamma) < \frac{\delta_\gamma}{2};$$

scelto un qualsiasi altro elemento $d_\zeta \in D$ certamente si avrà che

$$d(d_\gamma, d_\zeta) \geq \max\{\delta_\gamma, \delta_\zeta\}$$

e quindi $d(e_\gamma, e_\zeta) > 0$. Allora $e_\gamma \neq e_\zeta$ e dunque $\text{card } D \leq \text{card } E$.

Teorema 1.2.11 *Sia X uno spazio normato e \mathcal{C} un ricoprimento convesso di X . Supponiamo che esista un membro C di \mathcal{C} che sia un corpo convesso limitato il cui interno abbia intersezione vuota con tutti gli altri membri di \mathcal{C} . Allora $\text{card } \mathcal{C} \geq \text{norm}(X)$.*

Dim. Supponiamo, senza perdita di generalità, che l'origine sia un punto interno di C . Allora esistono due costanti positive a ed m tali per cui $aB(X) \subset C \subset mB(X)$ e $\sup_{x \in C} \|x\| < m$. Sia $\mathcal{C} \setminus \{C\} = \{C_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$. Per ogni $\gamma \in \Gamma$ scegliamo $f_\gamma \in S(X^*)$ tale che per qualche $b_\gamma > 0$ si abbia che l'iperpiano $f_\gamma^{-1}(b_\gamma)$ separi C da C_γ . Necessariamente deve essere $b_\gamma \geq a$. Essendo $X \setminus C \subset \bigcup_{\gamma \in \Gamma} C_\gamma$, si ha che

$$C = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} \{x \in X : f_\gamma(x) \leq b_\gamma\}.$$

Preso y in $X \setminus C$ si ha che, per qualche $\gamma \in \Gamma$, $y \in C_\gamma$. Perciò $f_\gamma(y) \geq b_\gamma \geq a$. In particolare ad ogni $y \in mS(X)$ si può associare un indice γ_y tale per cui $f_{\gamma_y}(y) \geq a$. E quindi per ogni $x \in X$

$$\sup \{|f_\gamma(x)| : \gamma \in \Gamma\} \geq \frac{a \|x\|}{m}$$

Abbiamo così dimostrato che $\{f_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ è un insieme $\frac{a}{m}$ -normante per X e quindi $\text{card } \mathcal{C} \geq \text{card } \Gamma \geq \text{norm}(X)$. ■

Definizione 1.2.12 *Sia C un sottoinsieme non vuoto di uno spazio normato, x_0 un punto di C ed ε un reale positivo. L'insieme C è detto ε -dentabile in x_0 se $x_0 \notin \overline{\text{co}}(C \setminus (x_0 + \varepsilon B(X)))$.*

Teorema 1.2.13 *Sia X uno spazio normato e \mathcal{C} un ricoprimento convesso di X . Supponiamo che esista un membro C di \mathcal{C} che sia un corpo convesso ε -dentabile in un qualche x_0 il cui interno abbia intersezione vuota con tutti gli altri membri di \mathcal{C} . Allora $\text{card } \mathcal{C} \geq \text{norm}(X)$.*

Dim. Si prenda un qualsiasi funzionale $f \in X^*$ che separi strettamente x_0 da $C \setminus (x_0 + \varepsilon B(X))$, ossia,

$$f(x_0) > d > \sup \{f(x) : x \in C \setminus (x_0 + \varepsilon B(X))\}.$$

Posto $C_1 = \{x \in C : f(x) \leq d\}$ e $C_2 = \{x \in C : f(x) \geq d\}$ si applichi il teorema 1.2.11 al ricoprimento convesso $(C \setminus \{C\}) \cup \{C_1, C_2\}$ e al corpo C_1 .

■

Definizione 1.2.14 *Un sottoinsieme C di uno spazio normato infinito-dimensionale viene detto finitamente limitato se l'intersezione di C con qualsiasi sottospazio finito-dimensionale è limitata. Quando C è un insieme convesso questo implica che C non contiene semirette.*

Proposizione 1.2.15 *Sia \mathcal{C} un ricoprimento convesso di X e C_0 un suo membro finitamente limitato. Se esiste in C_0 qualche punto che non appartiene alla chiusura di ogni altro membro di \mathcal{C} , allora per ogni $\lambda > 0$ l'insieme $C_0 + \lambda B(X)$ interseca $n = n(\lambda) \geq \text{tot}(X)$ membri di \mathcal{C} .*

Dim. Senza perdita di generalità sia l'origine un punto di C_0 che non appartiene a \overline{C} per alcun $C \in \mathcal{C} \setminus \{C_0\}$. Sia $S(C)$ un semispazio chiuso contenente l'origine il cui iperpiano di frontiera $H(C)$ separi strettamente l'origine da \overline{C} . Fissato $\lambda > 0$ poniamo

$$S = \bigcap \{S(C) : C \in \mathcal{C}, 0 \notin \overline{C}, (C_0 + \lambda B(X)) \cap C \neq \emptyset\}.$$

È facile rendersi conto che $S \subset C_0$. Infatti se così non fosse, essendo S convesso e contenente l'origine, si avrebbe che

$$S \cap ((C_0 + \lambda B(X)) \setminus C_0) \neq \emptyset,$$

una contraddizione. Quindi S è finitamente limitato, cioè non contiene semirette e dunque ogni semiretta uscente dall'origine "buca" $H(C)$ (per qualche C tale per cui $0 \notin \overline{C}$ e $(C_0 + \lambda B(X)) \cap C \neq \emptyset$). Questo implica che, posto $H(C) = f_C^{-1}(1)$, l'insieme

$$\{f_C : C \in \mathcal{C}, 0 \notin \overline{C}, (C_0 + \lambda B(X)) \cap C \neq \emptyset\}$$

è totale su X . ■

Nel caso dei piastrellamenti i risultati sopra esposti possono essere riassunti nei seguenti corollari.

Corollario 1.2.16 *Se qualche membro di un piastrellamento convesso \mathcal{T} di uno spazio normato X è finitamente limitato, allora $\text{card } \mathcal{T} \geq \text{tot}(X)$.*

Corollario 1.2.17 *Se qualche membro di un piastrellamento convesso \mathcal{T} di uno spazio normato X è limitato, allora $\text{card } \mathcal{T} \geq \text{norm}(X)$.*

1.3 Singolarità e caratteri cardinali

I risultati esposti in questo paragrafo riguardano l'esistenza delle singolarità. Vedremo come, sotto particolari ipotesi, si possa garantire che un punto appartenente al bordo di una piastrella sia un punto n -singolare e verranno date delle stime di n . Naturalmente queste stime precisano i risultati relativi alla cardinalità di un piastrellamento visti nel paragrafo precedente.

Sia X uno spazio normato, \mathcal{T} un piastrellamento convesso, C un suo membro e λ una topologia di Hausdorff compatibile con la struttura vettoriale di X . Scelto $A \subseteq X$, siano $(A, \|\cdot\|)$ e (A, λ) l'insieme A dotato della

topologia indotta dalla norma e da λ rispettivamente. Supponiamo che la mappa d'identità

$$I : (X, \|\cdot\|) \longrightarrow (X, \lambda)$$

sia continua diversamente da I^{-1} che non lo è (ossia λ è strettamente più debole della topologia indotta dalla norma).

Definizione 1.3.1 *La mappa I viene detta strettamente singolare se λ è strettamente più debole della topologia indotta dalla norma anche quando ristretta ad ogni sottospazio infinito-dimensionale di X .*

Definizione 1.3.2 *Dato un qualsiasi insieme $A \subset X$, un punto $x \in A$ è detto punto di λ -continuità (in A) se la mappa*

$$I_{|A}^{-1} : (A, \lambda) \longrightarrow (A, \|\cdot\|)$$

è continua in x .

Teorema 1.3.3 *Ogni punto estremo di C è un punto $\text{tot}(x)$ -singolare per \mathcal{T} .*

Teorema 1.3.4 *Se X è uno spazio di Banach, ogni punto appartenente a C di λ -continuità (in C) è un punto singolare per \mathcal{T} .*

Teorema 1.3.5 *Se X è uno spazio normato (eventualmente incompleto) ed I è strettamente singolare allora ogni punto appartenente a C di λ -continuità (in C) è un punto $\text{tot}(X)$ -singolare per \mathcal{T} .*

Le dimostrazioni dei tre risultati appena elencati verranno conglobate in una sola, la quale sarà esposta più avanti, dopo il seguente lemma.

Lemma 1.3.6 *Siano $(X, \|\cdot\|)$ e (X, λ) come se sopra, con $(X, \|\cdot\|)$ spazio di Banach. Sia L un sottospazio $\|\cdot\|$ -chiuso di X con $\text{codim}(L) < \infty$. Allora λ è strettamente più debole della topologia indotta dalla norma $\|\cdot\|$ anche quando ristretta ad L .*

Dim. Sia $(X, \|\cdot\|)$ di Banach. Supponiamo, per assurdo, che λ coincida su L con la topologia indotta da $\|\cdot\|$. Se così fosse L dovrebbe essere anche λ -chiuso. Infatti sia $\{x_\alpha\}$ una net in L che λ -converge ad un qualche punto $x \in X$. Poiché λ è compatibile con la struttura vettoriale di X , $\{x_\alpha\}$ è una net di Cauchy per λ e quindi, essendo λ strettamente più debole della topologia indotta da $\|\cdot\|$, è anche una net di Cauchy per $\|\cdot\|$ e deve perciò convergere a qualche punto $y \in L$. Ma allora $\{x_\alpha\}$ è λ -convergente ad y e $y = x \in L$. Ora, essendo L uno sottospazio chiuso di codimensione finita, è complementato sia in $(X, \|\cdot\|)$ che in (X, λ) e i complementi sono fra loro isomorfi in quanto hanno la stessa dimensione finita. Da questo segue che non è possibile che le due topologie coincidano ristrette a L , altrimenti le topologie prodotto (di quella su L e il suo complemento) sarebbero la stessa.

■

Osservazione 1.3.7 Se $(X, \|\cdot\|)$ non fosse completo il lemma appena esposto sarebbe falso, anche nel caso in cui λ sia una topologia generata da qualche norma (naturalmente più debole di $\|\cdot\|$). Infatti sia $(X, \|\cdot\|)$ un qualsiasi spazio normato infinito-dimensionale ed f un funzionale lineare $\|\cdot\|$ -discontinuo. Consideriamo lo spazio normato $(X, \|\cdot\|)$, dove $\|\cdot\|$ è una nuova norma su X così definita:

$$\|x\| = \|x\| + |f(x)| \quad x \in X.$$

La norma $\|\cdot\|$ è strettamente più forte di $\|\cdot\|$ perché il funzionale f è continuo in questa nuova norma. Inoltre $\ker(f) = L$ è un sottospazio $\|\cdot\|$ -chiuso e di

codimensione uno e, chiaramente, $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|$ coincidono su L . Lo spazio $(X, \|\cdot\|)$ non può essere completo. Questo perché se x_n è una successione tale che $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ ed $f(x_n) \rightarrow a \neq 0$ allora x_n è di Cauchy per $\|\cdot\|$, infatti

$$\|x_n - x_m\| = \|x_n - x_m\| + |f(x_n) - f(x_m)| \xrightarrow{n,m \rightarrow \infty} 0.$$

Se esistesse y tale per cui $(x_n - y) \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ si dovrebbe avere che

$$\|x_n - y\| + |f(x_n - y)| \rightarrow 0$$

e necessariamente che $\|x_n - y\| \rightarrow 0$, ovvero che $y = 0$. Ma allora

$$|f(x_n - y)| = |f(x_n)| \rightarrow |a| \neq 0,$$

una contraddizione.

Dim. dei teoremi 1.3.3-1.3.5. Senza perdita di generalità possiamo supporre che l'origine sia un punto interno di C . Scelti un punto $x \in \text{bdy}(C)$ ed ϵ un numero positivo, denotiamo con $\{C_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma(\epsilon)}$ la famiglia i cui elementi sono tutti e soli i membri di $\mathcal{T} \setminus \{C\}$ che intersecano $x + \epsilon \text{int } B(X)$. Per ogni $\gamma \in \Gamma(\epsilon)$, scegliamo un funzionale $f_\gamma \in X^*$ che separi C_γ da C in modo che $C \subseteq f_\gamma^{-1}((-\infty, 1])$ e $C_\gamma \subseteq f_\gamma^{-1}([1, +\infty))$. Si ha che

$$C \cap (x + \epsilon \text{int } B(X)) = \bigcap_{\gamma \in \Gamma(\epsilon)} f_\gamma^{-1}((-\infty, 1]) \cap (x + \epsilon \text{int } B(X)). \quad (1.1)$$

Infatti, preso un qualsiasi $y \in (x + \epsilon \text{int } B(X)) \setminus C$, esiste un $\delta \in (0, 1)$ tale che $\delta y \in (x + \epsilon \text{int } B(X)) \setminus C$ e quindi $\delta y \in C_\gamma$ per qualche $\gamma \in \Gamma(\epsilon)$. Perciò $f_\gamma(\delta y) \geq 1$ e, ovviamente, $f_\gamma(y) > 1$; viceversa se per qualche γ si avesse che $f_\gamma(y) > 1$, allora $y \notin C$.

Consideriamo ora il sottospazio (eventualmente banale) di X

$$L_\epsilon = \bigcap_{\gamma \in \Gamma(\epsilon)} \ker(f_\gamma)$$

munito della norma indotta. Per la (1.1) otteniamo immediatamente che

$$x + \epsilon B(L_\epsilon) \subset C. \quad (1.2)$$

Supponiamo che x non sia un punto $\text{tot}(x)$ -singolare per \mathcal{T} : per ϵ sufficientemente piccolo $\text{card } \Gamma(\epsilon) < \text{tot}(X)$, il che implica che $\{f_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma(\epsilon)}$ non è un insieme totale su X , ovvero esiste $z \in X$, $z \neq 0$, tale che $f_\gamma(z) = 0$ per ogni $\gamma \in \Gamma(\epsilon)$, e quindi $\dim(L_\epsilon) \geq 1$. In particolare se $\dim X = \infty$ allora anche $\dim L_\epsilon = \infty$.

Per la (1.2), C deve contenere un segmento non banale centrato in x e quindi x non può essere un punto estremo di C : questo dimostra il teorema 1.3.3.

Sempre per la (1.2), quando $\dim(X) = \infty$ ed I è un operatore strettamente singolare, x non può essere un punto di λ -continuità in C : infatti un qualsiasi λ -intorno di x , essendo $\|\cdot\|$ -illimitato anche lungo L_ϵ , deve necessariamente intersecare $x + \epsilon S(L_\epsilon)$. Abbiamo così dimostrato il teorema 1.3.5.

Per dimostrare il teorema 1.3.4 supponiamo che x non sia un punto singolare per \mathcal{T} . Questo implica che per ϵ sufficientemente piccolo $\Gamma(\epsilon)$ è finito e quindi anche $\text{codim}(L_\epsilon)$ è finita. Possiamo allora applicare il lemma 1.3.6 e concludere che λ è strettamente più debole della topologia indotta da $\|\cdot\|$ anche ristretta a L_ϵ ; allora un qualsiasi λ -intorno di x è $\|\cdot\|$ -illimitato lungo L_ϵ e deve quindi intersecare $x + \epsilon S(L_\epsilon)$. ■

Osservazione 1.3.8 La dimostrazione precedente racchiude il seguente risultato che per la sua natura altamente intuitiva vale la pena citare separatamente.

Se $x \in \text{bdy}(C)$ non è un punto $\text{tot}(X)$ -singolare per \mathcal{T} allora esiste un sottospazio affine non banale $x + L$ passante per x tale che $\text{bdy}(C) \cap (x + L)$ ha

interno non vuoto in $x + L$.

Alla luce di questa osservazione la (1.2) può essere così riscritta:

$$x + \epsilon B(L_\epsilon) \subset \text{bdy}(C).$$

Come abbiamo visto nell'osservazione 1.3.7, la dimostrazione del teorema 1.3.4 non è accettabile se lo spazio X non è completo. Non è noto se in realtà tale teorema continui a valere senza l'ipotesi di completezza: è comunque possibile sostituire l'ipotesi di completezza di $(X, \|\cdot\|)$ con delle richieste sulla ricchezza di $(X, \lambda)^*$.

Teorema 1.3.9 *Supponiamo che per ogni $T \in \mathcal{T}$, $T \neq C$, esista un funzionale λ -continuo che separi C da T . Allora ogni punto appartenente a C di λ -continuità (in C) è un punto singolare per \mathcal{T} .*

Dim. Useremo le stesse notazioni della dimostrazione precedente. Supponiamo per assurdo che x sia un punto di λ -continuità che non è singolare per \mathcal{T} . Allora, scelto ϵ sufficientemente piccolo, $\Gamma(\epsilon)$ è un insieme finito. Inoltre possiamo certamente scegliere i funzionali f_γ λ -continui. Sia W un λ -intorno di x tale che

$$C \cap W \subseteq x + \frac{\epsilon}{2} B(X). \quad (1.3)$$

Abbiamo concluso se mostriamo che $W \cap (x + L_\epsilon)$ è un insieme illimitato in norma: infatti, se così fosse, conterrebbe un qualche punto di $x + \epsilon S(X)$, contraddicendo la (1.3). Supponiamo quindi che $W \cap (x + L_\epsilon)$ sia limitato in norma. Essendo non vuoto il suo λ -intorno in $x + L_\epsilon$, si ha che su L_ϵ la topologia λ coincide con la topologia indotta dalla norma. Ma $\Gamma(\epsilon)$ è finito, quindi anche $\text{codim}(L_\epsilon)$ è finita ed L_ϵ , che per la λ -continuità dei funzionali f_γ è chiuso, ha complemento topologico finito-dimensionale in X . Allora,

ragionando come nel lemma 1.3.6, λ dovrebbe coincidere su tutto X con la topologia indotta dalla norma, contraddicendo l'ipotesi. ■

Il modo più naturale in cui inquadrare i teoremi precedenti si ha nel caso speciale in cui λ è la topologia debole. Oltretutto, come vedremo nel prossimo teorema, in questo contesto si riesce anche ad essere più precisi. Chiameremo *punto PC (in C)* un qualsiasi punto di C che sia di w -continuità (in C).

Teorema 1.3.10 *Ogni punto PC in C è un punto $\text{norm}(X)$ -singolare per \mathcal{T} .*

Dim. Senza perdita di generalità, supponiamo che l'origine sia il punto in questione. Fissato $\delta > 0$, sia $f_i \in X^*$, con $i = 1, \dots, n$ per qualche $n \in \mathbb{N}$, tale che per l'intorno debole definito da

$$W = \bigcap_{i=1}^n f_i^{-1}([-1, 1])$$

sia vero che $W \cap C \subset \text{int}(\delta B(X))$.

Consideriamo il ricoprimento convesso \mathcal{T}' di X costituito da

$$\mathcal{T}' = (\mathcal{T} \setminus \{C\}) \cup \{W \cap C\} \cup \{f_i^{-1}((-\infty, 1])\}_{i=1}^n \cup \{f_i^{-1}([1, +\infty))\}_{i=1}^n .$$

Allora \mathcal{T}' e il corpo limitato $W \cap C$ soddisfano le ipotesi del teorema 1.2.11, quindi ogni palla contenente al suo interno $W \cap C$ interseca almeno $\text{norm}(X)$ membri distinti di \mathcal{T}' . Tenendo presente che \mathcal{T} e \mathcal{T}' differiscono solo per un numero finito di membri, otteniamo la tesi. ■

Abbiamo visto che tra i punti del bordo di una piastrella che sono singolari vi sono tutti i punti estremi e tutti i punti PC. In particolare tra questi vi sono tutti i punti dentabili (definizione 1.2.12), infatti si può dimostrare che un punto è dentabile se e solo se è estremo e di w -continuità.

Capitolo 2

Piastrellamenti limitati notevoli

2.1 Piastrellamenti reticolari

In questo paragrafo X denoterà uno degli spazi classici c_0 , c , l^∞ .

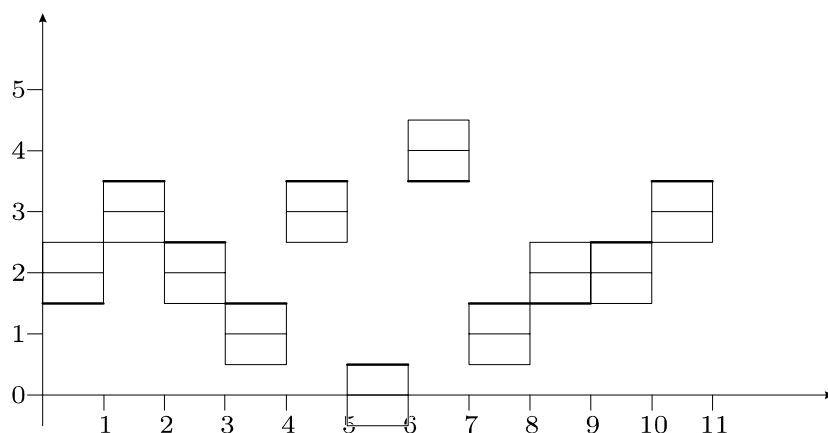
Siano

$$Z = \left\{ \mathbf{x} = (x^\gamma)_{\gamma \in \Gamma} \in X : x^\gamma \in \mathbb{Z} \right\},$$

$$T_{\mathbf{z}} = B(\mathbf{z}, \frac{1}{2}),$$

$$I(x^\gamma, r) = [x^\gamma - r, x^\gamma + r] \subset \mathbb{R}.$$

La famiglia \mathcal{T} formata dai $T_{\mathbf{z}}$ al variare di \mathbf{z} in Z costituisce un piastrellamento convesso e limitato i cui membri sono uniformemente limitati dal basso (cioè esiste un $\delta > 0$ tale per cui tutte le piastrelle contengono una palla di raggio δ) e dall'alto (ovvero il piastrellamento è equilimitato). Nella figura 2.1 è rappresentato l'elemento $\mathbf{x} = (\frac{3}{2}, \frac{7}{2}, \frac{5}{2}, \frac{3}{2}, \frac{7}{2}, \frac{1}{2}, \frac{7}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \dots)$ e la piastrella $T_{\mathbf{z}}$ con $\mathbf{z} = (2, 3, 2, 1, 3, 0, 4, 1, 2, 2, 3, \dots)$ al bordo della quale \mathbf{x} appartiene. Si noti che \mathbf{x} appartiene anche al bordo di $T_{\tilde{\mathbf{z}}}$ con $\tilde{\mathbf{z}} = (1, 4, 3, 2, 4, 1, 3, 2, 1, 3, 4, \dots)$ e di tutte le altre piastrelle $T_{\hat{\mathbf{z}}}$ dove $\hat{\mathbf{z}} = (\hat{z}^i)$ con $\hat{z}^i \in \{z^i, \tilde{z}^i\}$.

Figura 2.1: $T_{(2,3,2,1,3,0,4,1,2,2,3,\dots)}$

Ovviamente se $X = c_0$ il supporto di \mathbf{z} è finito (i.e. $\exists n_{\mathbf{z}} : \forall n > n_{\mathbf{z}} z^n = 0$).

Proposizione 2.1.1 *Se $X = c_0$ il piastrellamento \mathcal{T} è localmente finito (e quindi puntualmente finito e protettivo).*

Dim. Sia \mathbf{x} un qualsiasi elemento di c_0 . L'insieme $G = \{\gamma \in \mathbb{N} : |x^\gamma| \geq \frac{1}{4}\}$ è finito. Vale sempre la seguente, banale, inclusione

$$I(x^\gamma, \frac{1}{4}) \subset I([x^\gamma], \frac{1}{2}) \cup I([x^\gamma] + 1, \frac{1}{2})$$

mentre per ogni $\gamma \in \mathbb{N} \setminus G$ si ha $I(x^\gamma, \frac{1}{4}) \subset I(0, \frac{1}{2})$. Quindi

$$B(\mathbf{x}, \frac{1}{4}) \cap T_{\mathbf{z}} \neq \emptyset \iff z^\gamma \in \{[x^\gamma], [x^\gamma] + 1\} \forall \gamma \in G \wedge z^\gamma = 0 \forall \gamma \in \mathbb{N} \setminus G.$$

Ne segue che la palla di raggio $\frac{1}{4}$ centrata in \mathbf{x} interseca al più $2^{\text{card } G}$ piastrelle.

■

Osservazione 2.1.2 La locale finitezza di \mathcal{T} relativamente a c_0 non è connessa alla separabilità dello spazio. Sia infatti Γ un insieme generico non

vuoto e si consideri lo spazio $c_0(\Gamma)$ delle funzioni reali su Γ “nulle all’infinito” (cioè tali che, per ogni $\varepsilon > 0$, sia finito l’insieme dei punti di Γ sui quali esse valgono in modulo più di ε ; naturalmente il loro supporto risulta al più numerabile) dotato della norma dell’estremo superiore: chiaramente si ha $\text{dens } c_0(\Gamma) = \text{card } \Gamma$ se Γ non è finito e la dimostrazione della proposizione 2.1.1 può essere ripetuta senza alcuna modifica. Quando invece X è lo spazio di Banach c , oppure l^∞ , il piastrellamento \mathcal{T} non è né puntualmente finito - infatti l’elemento (mancante in c_0) $y = (y^i = \frac{1}{2})_{i=1}^\infty$ appartiene al bordo di tutte le piastrelle $T_{\mathbf{z}}$ con $z^i \in \{0, 1\}$ per ogni i (l’insieme delle successioni a valori 0 o 1 ha cardinalità più che numerabile) - né protettivo - $y = (y^i = \frac{i-1}{2i})_{i=1}^\infty$ appartiene solo a $T_{\mathbf{0}}$ ma non ad $\text{int } T_{\mathbf{0}}$. Questo genere di singolarità è in un certo senso caratteristica, infatti è facile convincersi che per questo piastrellamento non possono esistere punti \aleph_0 -singolari che non siano, automaticamente, anche 2^{\aleph_0} -singolari.

2.2 Piastrellamenti e spazi poliedrali

Definizione 2.2.1 *Uno spazio normato X finito-dimensionale è detto poliedrale se la palla unitaria $B(X)$ è un politopo, ovvero l’involucro convesso di un numero finito di punti.*

La palla unitaria di uno spazio poliedrale di dimensione finita possiede perciò un numero finito di punti estremi.

Definizione 2.2.2 *Uno spazio X è detto poliedrale se l’intersezione di $B(X)$ con ogni sottospazio finito-dimensionale di X è un politopo (cioè se ogni sottospazio finito-dimensionale è poliedrale nel senso della definizione 2.2.1).*

Si può dimostrare che uno spazio infinito-dimensionale è poliedrale se e solo se ogni sottospazio bidimensionale lo è ([K1]). Da ciò si deduce che la

poliedralità è una proprietà ereditaria (essa è goduta da ogni sottospazio) e che nessuno spazio strettamente convesso può essere poliedrale. Storicamente il primo esempio di spazio poliedrale di dimensione infinita è c_0 . Al termine di questo paragrafo verrà data una dimostrazione della poliedralità di c_0 .

Il concetto di poliedralità è fortemente legato alla teoria dei piastrellamenti: si può fornire infatti una caratterizzazione degli spazi poliedrali attraverso i piastrellamenti ([F3]). Non entreremo nei dettagli della teoria degli spazi poliedrali (già parzialmente oggetto di una recente tesi di laurea, [T]) e ci limiteremo a riportare, omettendone le dimostrazioni, solo i principali risultati che riguardano i piastrellamenti.

Diremo che uno spazio di Banach soddisfa la *proprietà P* se ogni punto di $S(X^*)$ che sia di w^* -accumulazione di $\text{ext } B(X^*)$ non realizza la sua norma sulla palla unitaria $B(X)$. Si può dimostrare che se uno spazio soddisfa questa proprietà allora la palla dello spazio non possiede punti estremi. Inoltre se uno spazio soddisfa la proprietà P è poliedrale. Quest'ultima affermazione non è in generale invertibile, infatti esistono spazi poliedrali le cui palle hanno punti estremi (tuttavia ogni spazio poliedrale ammette un rinormamento che soddisfa la proprietà P). Il viceversa vale se ci si restringe alla classe degli spazi di Lindenstrauss, ovvero agli spazi che sono preduali di $L^1(\mu)$ per una qualche misura μ : se uno spazio X è poliedrale e di Lindenstrauss allora soddisfa la proprietà P. Indubbiamente c_0 è uno spazio di Lindenstrauss.

Definizione 2.2.3 *Un insieme $F \subset S(X)$ è detto faccia piena di X se è una faccia, ovvero esiste un iperpiano chiuso $H \subset X$ che supporta $B(X)$ tale che $F = H \cap S(X)$, ed è solida nell'iperpiano H , ovvero $\text{int}_H F \neq \emptyset$.*

Vale il seguente teorema.

Teorema 2.2.4 *Se uno spazio (poliedrale) X soddisfa la proprietà P ed è separabile allora esiste un sottoinsieme numerabile Φ della sfera del duale $S(X^*)$ tale che la famiglia $\mathcal{F} = \{F_i = S(X) \cap f_i^{-1}(1) : f_i \in \Phi\}$ costituisca un piastrellamento localmente finito di $S(X)$. Equivalentemente possiamo dire che se uno spazio separabile soddisfa la proprietà P allora la famiglia delle facce piene dà luogo ad un piastrellamento localmente finito della sfera.*

Alla luce di questo risultato, posto

$$T_{F_i}^n = \{x \in X : x \in \alpha F_i, F_i \in \mathcal{F}, n \leq \alpha \leq n+1\} \quad n, i \in \mathbb{N},$$

è facile rendersi conto che la famiglia

$$\mathcal{T} = \{B(X)\} \cup \{T_{F_i}^n : F_i \in \mathcal{F}, n = 1, 2, 3, \dots\}$$

costituisce un piastrellamento limitato localmente finito di X .

In un certo senso vale anche il viceversa: infatti ([F3]) se uno spazio di Banach separabile X ammette un piastrellamento limitato e localmente finito allora X è isomorfo ad uno spazio poliedrale.

Sebbene l'esistenza di un simile piastrellamento per c_0 sia assicurata una volta dimostrata la poliedralità dello spazio, studieremo ora direttamente, utilizzando tecniche elementari anziché avvalerci dei risultati generali visti poco fa, la sua costruzione e vedremo alcuni suoi particolari.

Siano i, j e $r \in \mathbb{N}$. Definiamo i seguenti insiemi:

$$\begin{aligned} T_{ir+} &= \{x \in c_0 : x^i \in [r, r+1], |x^j| \leq |x^i| \quad \forall j \neq i\}, \\ T_{ir-} &= \{x \in c_0 : x^i \in [-r-1, -r], |x^j| \leq |x^i| \quad \forall j \neq i\}, \\ T_0 &= T_{i0+} = T_{i0-} = B(c_0). \end{aligned}$$

È ovvio che $T_{ir-} = -T_{ir+}$, che $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \pm T_{ir+} = B(\mathbf{0}, r+1) \setminus \text{int } B(\mathbf{0}, r)$ e che $\bigcup_{i \in \mathbb{N}, r \leq R} \pm T_{ir+} = B(\mathbf{0}, R+1)$. Quindi la famiglia \mathcal{T} formata da tutti i $T_{ir\pm}$

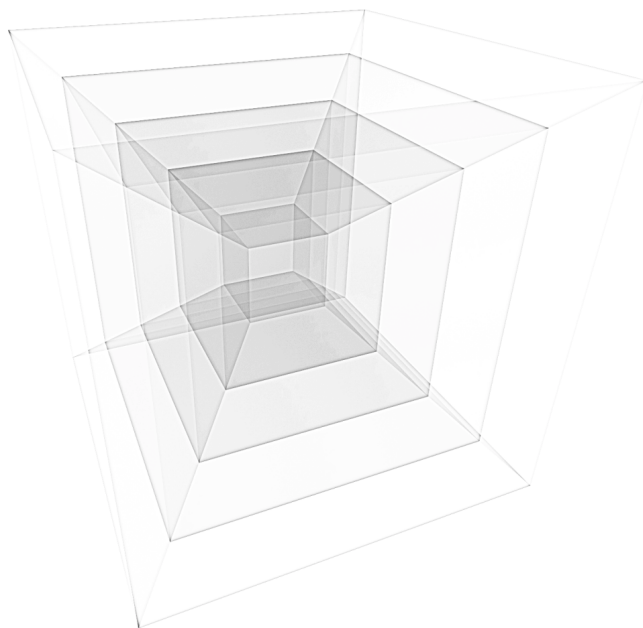


Figura 2.2: il piastrellamento in \mathbb{R}^3 con la norma del sup.

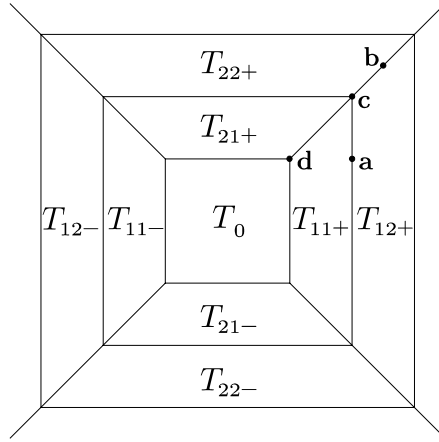
(variando i e r in \mathbb{N} e \pm in $\{+, -\}$) e da T_0 costituisce un ricoprimento di c_0 . Essendo inoltre gli interni a due a due disgiunti (è facile verificare che $\text{int } T_{ir+} = \{x \in c_0 : x^i \in (r, r+1), |x^j| < |x^i| \ \forall j \neq i\}$), \mathcal{T} è anche piastrellamento. Un analogo finito-dimensionale di questo piastramento è illustrato nelle figure 2.2 e 2.3).

Proposizione 2.2.5 \mathcal{T} è un piastrellamento localmente finito per c_0 .

Dim. Se \mathbf{y} è un punto di $T_{ir\pm}$ con $r \geq 1$, allora necessariamente $|y^i| > 1$. Fissato $\mathbf{x} \in c_0$, si consideri $B(\mathbf{x}, \frac{1}{2})$. L'insieme

$$W = \left\{ i \in \mathbb{N} : \exists \mathbf{y} \in B(\mathbf{x}, \frac{1}{2}) \text{ con } |y^i| > 1 \right\}$$

è finito. Infatti poiché $x^i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0$, esiste un intero m tale per cui $|x^n| < \frac{1}{2}$ per tutti gli $n > m$; è banale allora che $|y^n| < 1$ per tutti gli $n > m$ e gli

Figura 2.3: il caso di \mathbb{R}^2 con la norma del sup.

$\mathbf{y} \in B(\mathbf{x}, \frac{1}{2})$. Inoltre è ovvio che $B(\mathbf{x}, \frac{1}{2}) \subset B(\mathbf{0}, \|\mathbf{x}\| + \frac{1}{2})$, quindi $B(\mathbf{x}, \frac{1}{2})$ può contenere elementi appartenenti soltanto a qualcuna delle piastrelle T_0 o $T_{ir\pm}$, con $i \leq m$ ed $r < \|\mathbf{x}\| + \frac{3}{2}$, che sono chiaramente in numero finito. ■

Studieremo ora più in dettaglio il comportamento che si ha nei punti del bordo. Per questo definiamo le funzioni $r_{\mathbf{x}}(i) = \lceil |x^i| \rceil$ ed $s_{\mathbf{x}}(i) = \{+ \text{ se } x^i \geq 0, - \text{ altrimenti}\}$ e l'insieme $\Sigma(\mathbf{x}) = \{i \in \mathbb{N} : |x^i| = \|\mathbf{x}\|\}$. Ovviamente se $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ allora $\Sigma(\mathbf{x})$ è finito e non vuoto ($\lim_{i \rightarrow \infty} x^i = 0$) mentre $\Sigma(\mathbf{0}) = \mathbb{N}$; inoltre si ha $r_{\mathbf{x}}(i) = r_{\mathbf{x}}(j)$ per qualsiasi scelta di i e j in $\Sigma(\mathbf{x})$.

Come abbiamo visto prima, oltre agli elementi di norma minore di uno (che per definizione appartengono a $\text{int } T_0$), sono punti interni (a qualche piastrella) tutti gli \mathbf{x} con $1 < \|\mathbf{x}\| \notin \mathbb{N}$ e $\text{card } \Sigma(\mathbf{x}) = 1$. Consideriamo quattro particolari elementi di c_0 (le loro immagini sono rappresentate nella figura 2.3): $\mathbf{a} = (2, 1, 0, 0, 0, \dots)$, $\mathbf{b} = (\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 0, 0, 0, \dots)$, $\mathbf{c} = (2, 2, 0, 0, 0, \dots)$ e $\mathbf{d} = (1, 1, 0, 0, 0, \dots)$. I punti \mathbf{x} che come \mathbf{a} hanno norma intera maggiore o uguale a uno e $\Sigma(\mathbf{x})$ singoletto appartengono a tutte e due le piastrelle $T_{i r_{\mathbf{x}}(i) s_{\mathbf{x}}(i)}$ e $T_{i r_{\mathbf{x}}(i)-1 s_{\mathbf{x}}(i)}$ con $i \in \Sigma(\mathbf{x}) = \{i\}$. Se invece \mathbf{x} è, come \mathbf{b} , un

elemento di norma non intera (maggiore di uno) e $\text{card } \Sigma(\mathbf{x}) > 1$, allora \mathbf{x} appartiene a tutte le piastrelle $T_{i \ r_{\mathbf{x}(i)} \ s_{\mathbf{x}(i)}}$ con $i \in \Sigma(\mathbf{x})$ (sono in quantità di $\text{card } \Sigma(\mathbf{x})$). Esistono situazioni intermedie come per il punto \mathbf{c} (\mathbf{x} appartiene a tutte (sono $2 \text{ card } \Sigma(\mathbf{x})$) le $T_{i \ r_{\mathbf{x}(i)} \ s_{\mathbf{x}(i)}}$ e $T_{i \ r_{\mathbf{x}(i)}-1 \ s_{\mathbf{x}(i)}}$ con $i \in \Sigma(\mathbf{x})$) o \mathbf{d} (\mathbf{x} appartiene a tutte le $T_{i \ 1 \ s_{\mathbf{x}(i)}}$ con $i \in \Sigma(\mathbf{x})$ e T_0 , per un totale di $\text{card } \Sigma(\mathbf{x}) + 1$ piastrelle).

Osservazione 2.2.6 Naturalmente quanto sopra esposto per c_0 vale anche per lo spazio non separabile $c_0(\Gamma)$, $\text{card } \Gamma > \aleph_0$. Infatti, essendo l'insieme $\{\gamma \in \Gamma : |x^\gamma| > \varepsilon\}$ finito per ogni $\varepsilon > 0$, $\Sigma(x)$ e $\{\gamma \in \Gamma : |x^\gamma| + \delta \geq \|\mathbf{x}\| - \delta\}$ sono finiti per ogni $x \neq 0$ e $\delta < \frac{\|\mathbf{x}\|}{2}$ e quindi \mathcal{T} è un piastrellamento localmente finito per $c_0(\Gamma)$. (Per la definizione di $c_0(\Gamma)$ si veda l'osservazione 2.1.2.)

Concludiamo questo paragrafo con la promessa dimostrazione della poliedralità di c_0 , anzi di $c_0(\Gamma)$ con Γ qualsiasi.

Teorema 2.2.7 *Sia Γ un insieme non vuoto di cardinalità qualsiasi. Lo spazio di Banach $c_0(\underset{\neq}{\neq})$ è poliedrale.*

Dimostreremo che la sfera di un qualsiasi sottospazio bidimensionale è un poligono (naturalmente con un numero finito di lati).

Sia $\mathbf{x} = (x^\gamma)_{\gamma \in \Gamma} \in c_0(\Gamma)$ e

$$\Sigma(\mathbf{x}) = \{\gamma \in \underset{\neq}{\neq} : |x^\gamma| = \|\mathbf{x}\|\}.$$

Ovviamente se $\mathbf{x} \neq 0$ $\Sigma(\mathbf{x})$ è sempre finito: infatti l'insieme $\{\gamma \in \Gamma : |x^\gamma| > \varepsilon\}$ è finito per ogni $\varepsilon > 0$. Poniamo inoltre, per un qualsiasi sottoinsieme A di $c_0(\underset{\neq}{\neq})$, $\Sigma(A) = \bigcup_{\mathbf{x} \in A} \Sigma(\mathbf{x})$.

Anticipiamo i seguenti lemmi.

Lemma 2.2.8 *Siano \mathbf{x} e \mathbf{y} due elementi non nulli e linearmente indipendenti di $c_0(\underline{\mathbb{F}})$, $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ il segmento che li congiunge e $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda^i)_{i=1}^{+\infty} = \lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y}$, $\lambda \in [0, 1]$, il generico punto di $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$. L'insieme $\Sigma([\mathbf{x}, \mathbf{y}]) = \bigcup_{\lambda \in [0, 1]} \Sigma(\boldsymbol{\lambda})$ è finito.*

Dim. La dimostrazione sarà per assurdo. Poniamo

$$\Gamma_\varepsilon = \{\gamma \in \Gamma : \max\{|x^\gamma|, |y^\gamma|\} > \varepsilon\}.$$

Sia $\Sigma([\mathbf{x}, \mathbf{y}])$ infinito: allora esiste una successione di scalari $\{\lambda_k\}$ e una di indici $\{\gamma_k\}$ tale per cui $\gamma_k \in \Sigma(\boldsymbol{\lambda}_k) \setminus \Gamma_{\frac{1}{k}}$. Allora per ogni $\gamma \in \Gamma$ si ha

$$|\lambda_k^\gamma| \leq \max\{|x^{\gamma_k}|, |y^{\gamma_k}|\} \leq \frac{1}{k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

Sia λ_∞ un punto di accumulazione per $\{\lambda_k\}$. È facile verificare che deve essere $|\lambda_\infty^\gamma| = 0$ per ogni $\gamma \in \Gamma$. Ciò è impossibile in quanto \mathbf{x} e \mathbf{y} sono linearmente indipendenti. ■

Lemma 2.2.9 *Sia $M = \text{span}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, dove \mathbf{x} e \mathbf{y} sono come nell'enunciato del lemma 2.2.8, ed $S(M) = S(c_0(\Gamma)) \cap M$. L'insieme $\Sigma(S(M))$ è finito.*

Dim. È chiaro che per ogni \mathbf{z} diverso da $\mathbf{0}$ si ha $\Sigma(\mathbf{z}) = \Sigma\left(\frac{\mathbf{z}}{|\mathbf{z}|}\right)$. Siano S_1, S_2, S_3 ed S_4 gli archi di $S(M)$ ottenuti normalizzando rispettivamente $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$, $[-\mathbf{x}, \mathbf{y}]$, $[\mathbf{x}, -\mathbf{y}]$ e $[-\mathbf{x}, -\mathbf{y}]$, ovvero:

$$S_1 = \left\{ \bar{\mathbf{z}} \in S(M) : \bar{\mathbf{z}} = \frac{\mathbf{z}}{|\mathbf{z}|} \text{ con } \mathbf{z} \in [\mathbf{x}, \mathbf{y}] \right\},$$

$$S_2 = \left\{ \bar{\mathbf{z}} \in S(M) : \bar{\mathbf{z}} = \frac{\mathbf{z}}{|\mathbf{z}|} \text{ con } \mathbf{z} \in [-\mathbf{x}, \mathbf{y}] \right\},$$

$$S_3 = -S_2 \quad \text{ed} \quad S_4 = -S_1.$$

Evidentemente sia ha

$$S(M) = \bigcup_{i=1,2,3,4} S_i,$$

$$\Sigma(S_1) = \Sigma(S_4) = \Sigma([\mathbf{x}, \mathbf{y}]),$$

$$\Sigma(S_2) = \Sigma(S_3) = \Sigma([-\mathbf{x}, \mathbf{y}])$$

e quindi

$$\Sigma(S(M)) = \bigcup_{i=1,2,3,4} \Sigma(S_i) = \Sigma([\mathbf{x}, \mathbf{y}]) \cup \Sigma([-\mathbf{x}, \mathbf{y}]).$$

Ma $\Sigma([\mathbf{x}, \mathbf{y}])$ e $\Sigma([-\mathbf{x}, \mathbf{y}])$ sono finiti per il lemma 2.2.8 e quindi anche $\Sigma(S(M))$ lo è. ■

Torniamo alla

Dim. del teorema 2.2.7. Sia M come nell'enunciato del lemma 2.2.9 ed $f_\gamma : c_0(\underset{\neq}{\leq}) \rightarrow \mathbb{R}$ il funzionale coordinata che associa all'elemento $\mathbf{z} = \{z^\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ la sua coordinata γ -esima z^γ . È ovvio che per ogni γ appartenente a $\Sigma(S(M))$ si ha che $f_\gamma^{-1}(\pm 1) \cap S(M)$ è un segmento. Ma

$$S(M) = \bigcup_{\gamma \in \Sigma(S(M))} (f_\gamma^{-1}(\pm 1) \cap S(M)) :$$

essendo $\Sigma(S(M))$ finito per il lemma 2.2.9, $S(M)$ risulta essere un poligono.

■

2.3 Piastrellamento universale

Come d'uso, se Γ è un generico insieme non vuoto, indicheremo con $l^\infty(\Gamma)$ lo spazio delle funzioni reali limitate su Γ essendo la norma quella dell'estremo superiore.

Proposizione 2.3.1 *Sia Γ un insieme infinito qualsiasi. Lo spazio di Banach reale (non separabile) $l^\infty(\Gamma)$ ammette un piastrellamento σ convesso e limitato con $\text{card } \sigma = \text{card } \Gamma$.*

Dim. Certamente possiamo assumere che Γ sia ben ordinato, ovvero che $\Gamma = \{\nu : 1 \leq \nu < \gamma\}$, con γ ordinale limite. Sia $\{r_n\}_{n=1}^\infty$ una arbitraria successione strettamente crescente di numeri reali positivi tendente all'infinito. Posto $X = l^\infty(\Gamma)$, definiamo per ogni $\nu \in \Gamma$ gli insiemi

$$G_\nu^- = \{x \in X : |x(\nu)| \leq 1\} \quad \text{e} \quad G_\nu^+ = \{x \in X : |x(\nu)| \geq 1\}.$$

Sia

$$A_0 = r_1 B(X)$$

e, per $n = 1, 2, \dots$,

$$A_1^{(n)} = r_n G_1^+ \cap r_{n+1} B(X),$$

$$A_\nu^{(n)} = \bigcap_{\mu} \{r_n G_\mu^- : \mu < \nu\} \cap r_n G_\nu^+ \cap r_{n+1} B(X), \quad 2 \leq \nu < \gamma.$$

È facile rendersi conto che la famiglia $\sigma = \{A_0, \pm A_\nu^{(n)} : \nu \in \Gamma, n = 1, 2, \dots\}$ soddisfa le proprietà richieste. ■

Le figure 2.4 e 2.5 mostrano la costruzione nel caso di $\Gamma = \{1, 2\}$ e $\Gamma = \{1, 2, 3\}$ rispettivamente.

Lemma 2.3.2 *Sia X uno spazio normato, $\bar{\alpha} \in (0, 1]$ e $M \subset S(X^*)$ un insieme $\bar{\alpha}$ -normante per X . Allora, scelti due qualsiasi reali positivi α e β*

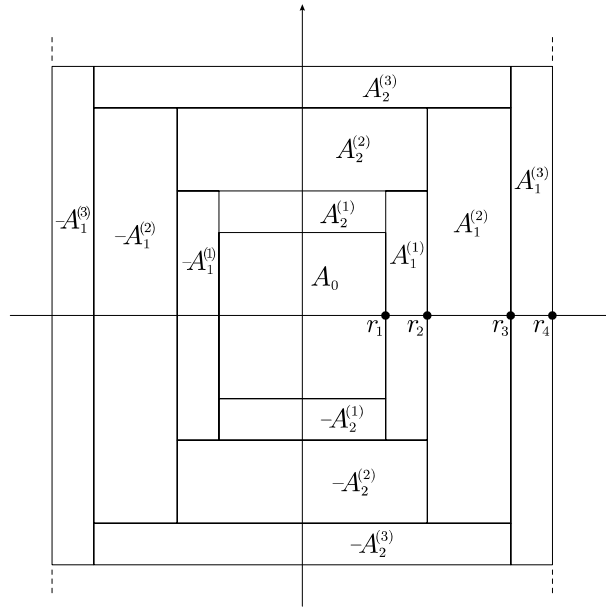
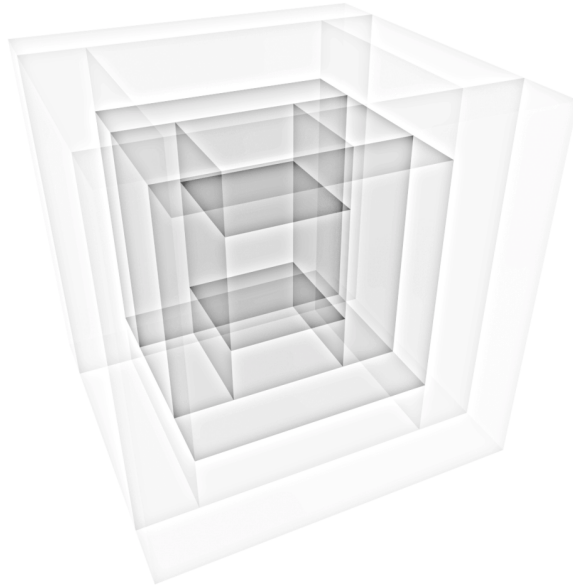


Figura 2.4: Piastrellamento universale

Figura 2.5: Piastrellamento universale in \mathbb{R}^3

con $\beta < \alpha < \bar{\alpha}$, esiste un ordinale γ con $\text{card } \gamma \leq \text{dens}(X)$ e un insieme totalmente ordinato di coppie $\{(x_\nu, f_\nu)\}_{1 \leq \nu < \gamma}$ tale che:

- (1) $x_\nu \in S(X)$ e $f_\nu \in M$, $1 \leq \nu < \gamma$;
- (2) $|f_\mu(x_\mu)| \leq \beta$, $1 \leq \mu < \nu < \gamma$;
- (3) $f_\nu(x_\nu) \geq \alpha$, $1 \leq \nu < \gamma$;
- (4) l'insieme $\{f_\nu\}_{1 \leq \nu < \gamma}$ sia β -normante per X .

Dim. Scelti α e β che soddisfino le ipotesi, supponiamo che esista un sistema che soddisfi le proprietà (1)-(4) e sia $1 \leq \mu < \nu < \gamma$. Da

$$\|x_\mu - x_\nu\| \geq |f_\mu(x_\mu - x_\nu)| \geq \alpha - \beta > 0$$

segue che $\text{card } \gamma \leq \text{dens}(X)$. Costruiamo ora il sistema. Sia Φ la famiglia i cui membri sono i sottoinsiemi totalmente ordinati $\{x_\nu, f_\nu\}_{\nu < \delta}$ di $S(X) \times M$ (δ è un qualche ordinale) che soddisfano le due condizioni

$$|f_\mu(x_\nu)| \leq \beta, \quad 1 \leq \mu < \nu < \delta$$

$$f_\nu(x_\nu) \geq \alpha, \quad 1 \leq \nu < \delta.$$

Naturalmente Φ è non vuota. Consideriamo l'ordine parziale \prec su Φ definito nel seguente modo. Per $\Delta_1 = \{x_\nu^{(1)}, f_\nu^{(1)}\}_{\nu < \delta_1}$ e $\Delta_2 = \{x_\nu^{(2)}, f_\nu^{(2)}\}_{\nu < \delta_2}$ in Φ si ha che $\Delta_1 \prec \Delta_2$ se e solo se $\delta_1 \leq \delta_2$ e $x_\nu^{(1)} = x_\nu^{(2)}$, $f_\nu^{(1)} = f_\nu^{(2)}$ per $\nu < \delta_1$. Soddisfacendo (Φ, \prec) le ipotesi del lemma di Zorn, esiste in Φ un elemento massimale $\Delta = (x_\nu, f_\nu)_{\nu < \gamma}$ (γ ordinale opportuno). Abbiamo finito a patto di dimostrare che l'insieme $\{f_\nu\}_{\nu < \gamma}$ è β -normante. Per assurdo sia il contrario, ovvero esiste un elemento $x \in S(X)$ tale che

$$\sup \{|f_\nu(x)| : 1 \leq \nu < \gamma\} < \beta.$$

Ma M è α -normante e $\alpha < \bar{\alpha}$. Esiste quindi $f \in M$ tale che $|f(x)| \geq \alpha$ e possiamo assumere (senza perdita di generalità, prendendo eventualmente $-x$ al posto di x) che $f(x) \geq \alpha$. Sia $x_\gamma = x$, $f_\gamma = f$ e $\Delta_0 = \{x_\nu, f_\nu\}_{\nu < \gamma+1}$. Abbiamo che $\Delta_0 \in \Phi$ e che $\Delta \prec \Delta_0$ quando $\Delta \neq \Delta_0$, assurdo perché Δ è massimale. ■

Sia ora σ il piastrellamento della proposizione 2.3.1, costruito scegliendo $\{r_n\} = \{2^n\}$.

Teorema 2.3.3 *Sia Γ un insieme infinito. Il piastrellamento σ di $l^\infty(\Gamma)$ è universale per qualsiasi spazio normato X con $\text{norm}(X) = \text{card } \Gamma$, ovvero esiste un'immersione isomorfa $T : X \rightarrow l^\infty(\Gamma)$ tale che la famiglia $\{T^{-1}(A) : A \in \sigma\}$ sia una piastrellamento convesso limitato di X .*

Dim. Sia M un insieme normante con $\text{card } M = \text{norm}(X)$. Passando alla norma equivalente ($\|x\| = \sup \{|f(x)| : f \in M\}$), possiamo assumere che M sia 1-normante ($\bar{\alpha}$ -normante con $\bar{\alpha} = 1$). Applicando il lemma 2.3.2 con $\alpha = \frac{3}{4}$ e $\beta = \frac{1}{2}$ otteniamo un sistema $\{(x_\nu, f_\nu)\}_{1 \leq \nu < \gamma}$ che soddisfa le proprietà (1)-(4) dell'enunciato del lemma. Sia $\Gamma = \{f_\nu : 1 \leq \nu < \gamma\}$. Dal lemma sappiamo che Γ è un insieme $\frac{1}{2}$ -normante, $\Gamma \subset M$ e quindi $\text{card } \Gamma = \text{card } M = \text{norm}(X)$. Definiamo l'immersione lineare $T : X \rightarrow l^\infty(\Gamma)$ che associa ad ogni $x \in X$ la successione

$$T(x) = \{a_\nu\} = \{(T(x)(f_\nu))\} = \{f_\nu(x)\} \quad 1 \leq \nu < \gamma.$$

Essendo Γ un insieme $\frac{1}{2}$ -normante (e naturalmente $\Gamma \subset S(X^*)$), per ogni $x \in X$ abbiamo che

$$\frac{\|x\|}{2} \leq \|T(x)\| \leq \|x\|$$

ovvero che T è un'immersione isomorfa. Per concludere la dimostrazione ci basta mostrare che, per ogni $A \in \sigma$, l'insieme $A \cap T(X)$ ha interno non vuoto

in $T(X)$: è infatti evidente che $T^{-1}(A)$ è convesso (T è immersione lineare) e limitato (T è immersione isomorfa). Usiamo le notazioni della proposizione 2.3.1 con $r_n = 2^n$. Ovviamente $A_0 \cap T(X)$ ha interno non vuoto, infatti $\frac{1}{2}B(l^\infty(\Gamma)) \subset T(X)$ e $A_0 = 2B(l^\infty(\Gamma))$.

Per $1 \leq \nu < \gamma$ e $n = 1, 2, \dots$, poniamo

$$y_\nu^{(n)} = (2^{n+1} - \frac{2}{5})T(x_\nu).$$

Dimostreremo ora che $y_\nu^{(n)} \in \text{int}_{T(X)}(A_\nu^{(n)})$. Dalle proprietà (2) e (3) segue che

- (a) $y_\nu^{(n)}(f_\nu) > 2^n + \frac{1}{2}$, $1 \leq \nu < \gamma$, $n = 1, 2, \dots$ e
 (b) $|y_\nu^{(n)}(f_\mu)| \leq 2^n - \frac{1}{5}$, $1 \leq \mu < \nu < \gamma$, $n = 1, 2, \dots$.

Da (a) si ha che $y_\nu^{(n)} \in 2^n G_\nu^+$ mentre da (b) otteniamo che $y_\nu^{(n)} \in \bigcap_{\mu < \nu} 2^n G_\mu^-$. Quindi $y_\nu^{(n)} \in A_\nu^{(n)} \cap T(X)$. Fissati ν ed n , scegliamo un qualsiasi elemento $z \in T(X)$ tale che $\|z - y_\nu^{(n)}\| < \frac{1}{5}$. Chiaramente si ha che $\|z\| < 2^{n+1}$ e $z(f_\nu) \geq y_\nu^{(n)}(f_\nu) - \frac{1}{5}$. Inoltre $|z(f_\mu)| \leq |y_\nu^{(n)}(f_\mu)| + \frac{1}{5}$, $\nu > 1$ e $1 \leq \mu < \nu$. Per (a) e (b) abbiamo quindi che $z \in A_\nu^{(n)} \cap T(X)$ ovvero che ogni insieme $T^{-1}(A)$, $A \in \sigma$ ha interno non vuoto. Quindi la famiglia

$$\mathcal{T} = \{T^{-1}(A) : A \in \sigma\}$$

costituisce un piastrellamento convesso e limitato per X . ■

Osservazione 2.3.4 Per il corollario 1.2.17 il piastrellamento \mathcal{T} è il migliore dal punto di vista della cardinalità.

Osservazione 2.3.5 La costruzione appena vista fornisce, per ogni spazio normato X , un piastrellamento *uniformemente limitato dal basso*, ovvero esiste $\delta > 0$ (nella dimostrazione $\delta = \frac{1}{5}$) tale per cui ogni piastrella contiene una palla di raggio δ .

2.4 Piastrellamenti equilimitati: RNP

In alcuni casi è possibile ottenere, partendo da un qualsiasi piastrellamento convesso e limitato, un piastrellamento che sia equilimitato.

Definizione 2.4.1 *Uno spazio di Banach X soddisfa la proprietà di Radon-Nikodym (RNP) se per ogni corpo convesso $C \subset X$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esistono un funzionale $f \in X^*$ e una costante λ tali per cui la “fetta” $\{x \in C : f(x) \geq \lambda\}$ è un corpo convesso con diametro $\leq \varepsilon$.*

Congettura 2.4.2 *Ogni spazio di Banach che gode della proprietà di Radon-Nikodym ammette un piastrellamento convesso con piastrelle equilimitate.*

Tenendo conto del teorema 2.3.3, questa congettura sarebbe positivamente risolta se lo fosse la seguente

Congettura 2.4.3 *Sia C un corpo convesso di uno spazio di Banach X ed ε un numero positivo fissato. Se X soddisfa la RNP allora C può essere ricoperto da corpi convessi di diametro al più ε aventi interni a due a due disgiunti.*

Diamo qui una traccia di una possibile soluzione (in positivo) della congettura. Sia X uno spazio di Banach soddisfacente la RNP e C un corpo convesso. Si fissi $\varepsilon > 0$. Per la RNP si ha che esistono un funzionale $f_1 \in X^*$ e uno scalare λ_1 tali per cui il diametro di $E_1 = \{x \in C : f_1(x) \geq \lambda_1\}$ è minore o uguale a ε . Ovviamente $R_2 = \{x \in C : f_1(x) \leq \lambda_1\}$ è un corpo convesso. Se $\text{diam } R_2 \leq \varepsilon$ abbiamo finito, altrimenti esistono un funzionale f_2 e uno scalare λ_2 tali per cui, posto $E_2 = \{x \in R_2 : f_2(x) \geq \lambda_2\}$, si ha che $\text{diam } E_2 \leq \varepsilon$. Poniamo $R_3 = \{x \in R_2 : f_2(x) \leq \lambda_2\} = \{x \in C : f_i(x) \leq \lambda_i, 1 \leq i < 3\}$ e iteriamo (eventualmente in modo transfinito) il procedimento. Non appena

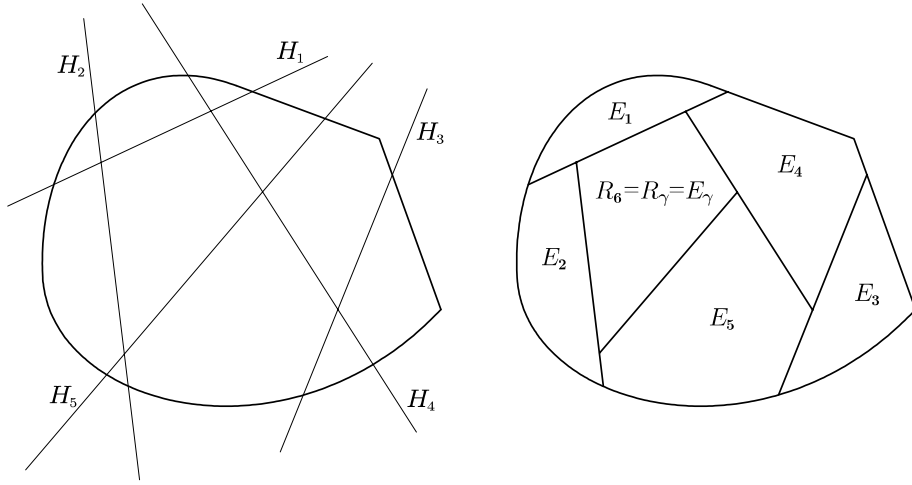


Figura 2.6: Affettare un corpo convesso grazie alla RNP.

avremo che $\text{diam } R_{\bar{\nu}} \leq \varepsilon$ ci fermeremo, ponendo $\bar{\nu} = \gamma$. In pratica affettiamo C con tagli $H_{\nu} = f_{\nu}^{-1}(\lambda_{\nu})$ (figura 2.6).

In generale avremo che

$$\begin{aligned} E_1 &= \{x \in C : f_1(x) \geq \lambda_1\}, & R_1 &= \{x \in C : f_1(x) \leq \lambda_1\}, \\ E_{\nu} &= \{x \in C : f_{\nu}(x) \geq \lambda_{\nu}, f_{\mu}(x) \leq \lambda_{\mu} \quad 1 \leq \mu < \nu\}, \\ R_{\nu} &= \{x \in C : f_{\mu}(x) \leq \lambda_{\mu} \quad 1 \leq \mu < \nu\}, \\ E_{\gamma} &= R_{\gamma} = \{x \in C : f_{\mu}(x) \leq \lambda_{\mu} \quad \forall \mu\}. \end{aligned}$$

È chiaro che la famiglia $\{E_{\nu} : 1 \leq \nu \leq \gamma\}$ costituisce un ricoprimento di C con insiemi convessi aventi diametro al più ε : il problema consiste nel riuscire a portare a termine la sopraindicata procedura di affettamento senza ridursi ad avere fette con interno vuoto ed ottenere così un piastrellamento. Come vedremo tra poco, questo inconveniente può verificarsi anche nel caso in cui il numero di tagli sia “solo” numerabile (è facile convincersi che se i tagli sono in numero finito ogni fetta è un corpo convesso).

In [FL], gli autori dell'articolo affermano che la dimostrazione della congettura 2.4.3 si basa su una diretta applicazione del principio di induzione transfinita. Questo principio (si veda ad esempio [H]) asserisce che, se S è un sottoinsieme di un insieme ben ordinato $W = (W, \prec)$ e se, per ogni $x \in W$ tale che $\{w \in W : w \prec x\} \subset S$, si ha necessariamente che anche $x \in S$, allora $S = W$. In altre parole il principio di induzione transfinita afferma che, se la presenza nell'insieme dei predecessori stretti di un elemento implica sempre la presenza dell'elemento stesso, l'insieme deve contenere tutto.

Il modo forse più diretto e naturale per applicare il principio al problema sopra esposto è di considerare W come l'insieme di tutte le fette ed S come il sottoinsieme delle fette con interno non vuoto. L'ordinamento sarà ovviamente quello dei tagli. Dovremmo quindi mostrare che se tutte le fette E_μ con $\mu < \nu$ hanno interno non vuoto anche $\text{int } E_\nu \neq \emptyset$. Purtroppo in generale questo non accade, nemmeno nel piano euclideo, come mostra il seguente (contro)esempio.

Esempio 2.4.4 *Un corpo convesso (ottenuto tagliando a metà lungo l'asse minore una qualsiasi ellisse che non sia anche circonferenza) viene affettato con tagli paralleli al lato rettilineo (si veda la figura 2.7). Ogni fetta ha diametro esattamente uguale alla lunghezza del lato rettilineo. I tagli "si accumulano contro" il lato rettilineo (che ovviamente ha interno vuoto).*

Chiaramente in questo esempio, fissato $\nu < \gamma$, l'interno di E_μ è non vuoto per ogni $\mu < \nu$ e anche $\text{int } E_\nu \neq \emptyset$. Tuttavia se consideriamo (farlo non solo è lecito, ma addirittura è obbligatorio) $\nu = \gamma$ ci accorgiamo che tutte le fette E_μ con $\mu < \gamma$ hanno interno non vuoto mentre $\text{int } E_\gamma$ è chiaramente vuoto e non riusciamo quindi a verificare l'ipotesi di induzione.

Una procedura di taglio in fette $\{E_\nu\}_{1 \leq \nu \leq \gamma}$ di diametro al più ε di un generico corpo convesso C individua una famiglia ordinata di coppie funzionale-

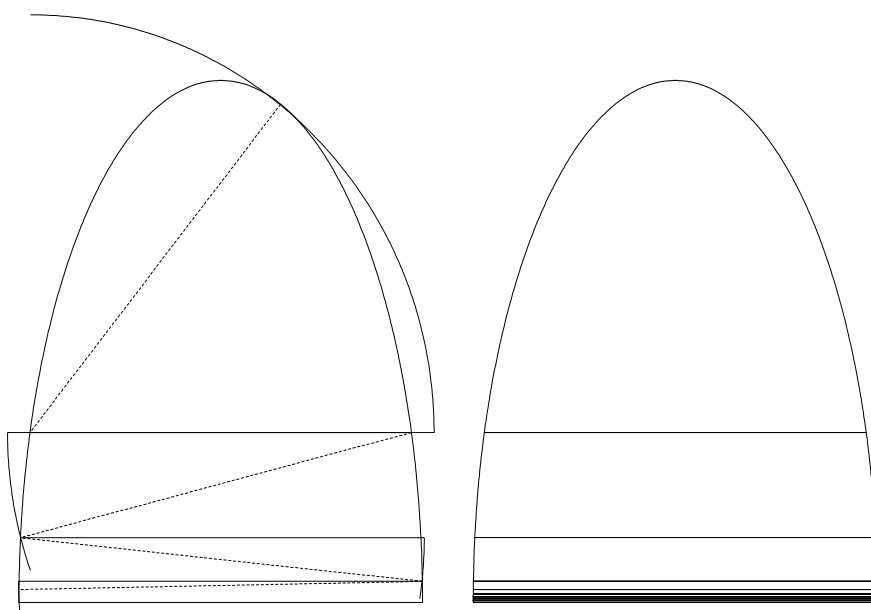


Figura 2.7: Suddivisione “Radon-Nikodym” minimale.

costante $\{(f_\nu, \lambda_\nu)\}_{\nu=1}^\gamma$. Una tale procedura verrà detta *minimale* se, omettendo un qualsiasi taglio (ovvero considerando la famiglia $\{(f_\nu, \lambda_\nu)\}_{1 \leq \nu \leq \gamma, \nu \neq \bar{\nu}}$), gli insiemi che si vengono a trovare non sono più uniformemente limitati dalla costante ε . Si potrebbe essere portati a credere che la scelta di un affettamento mediante una famiglia minimale di funzionali possa bastare nel fornire un ricoprimento di C che sia anche piastrellamento. L'esempio 2.4.4 funge da controesempio anche per questa congettura. Infatti è facile rendersi conto che non è possibile rinunciare a nessun taglio se si vuole mantenere una suddivisione in insiemi convessi di diametro minore o uguale alla lunghezza del lato piatto (le fette hanno già diametro massimo). L'esempio suggerisce inoltre che non si possono “accettare alla cieca” i funzionali così come vengono forniti dalla proprietà di Radon-Nikodym e che può invece essere necessario fare delle sostituzioni arbitrarie (è evidente che proprio nell'esempio basterebbe accettare solo un certo numero finito di tagli e sostituire i rimanenti infiniti

con un unico taglio lungo l'asse maggiore dell'ellisse per risolvere con successo il problema).

2.5 Piastrellamenti equilimitati: UC

Se X è uno spazio di Banach uniformemente convesso, è effettivamente possibile costruire un piastrellamento convesso equilimitato. Ricordiamo che uno spazio normato X viene detto uniformemente convesso se, per ogni $\varepsilon \in (0, 2]$,

$$\delta(\varepsilon) = \inf \left\{ 1 - \left\| \frac{x+y}{2} \right\|; x, y \in B(X), \|x-y\| \geq \varepsilon \right\} > 0.$$

La funzione $\delta(\varepsilon)$ viene detta *modulo di convessità*: è facile convincersi che è monotona crescente mentre non è banale dimostrare, sebbene lo si intuisca, che è continua per $\varepsilon < 2$ (Goebel, [R] e [GK]). Si ha inoltre che il modulo di convessità soddisfa sempre ([No])

$$\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\delta(\varepsilon)}{\varepsilon^2} < \infty.$$

Osserviamo infine che l'uniforme convessità implica la riflessività dello spazio (Šmulyan, [HHZ]).

Direttamente dalla definizione si ottiene che per ogni coppia $x, y \in B(X)$ con $\|x-y\| \geq \varepsilon$ il punto medio $\frac{x+y}{2}$ appartiene a $(1-\delta(\varepsilon))B(X)$; questa semplice osservazione sarà cruciale per il seguito.

Ad ogni $z \in S(X)$ si associ un funzionale di supporto $f_z \in S(X^*)$ che realizzi la norma in (e solo in) z . Fissato $\varepsilon \in (0, 2)$ poniamo

$$g_z^\varepsilon = \frac{1}{1-\delta(\varepsilon)} f_z,$$

$$C_z^\varepsilon = B(X) \cap (g_z^\varepsilon)^{-1}([1, +\infty)).$$

Proposizione 2.5.1 C_z^ε è un corpo convesso e $\text{diam } C_z^\varepsilon \leq \varepsilon$.

Dim. È ovvio che C_z^ε sia un corpo convesso. Supponiamo per assurdo che $\text{diam } C_z^\varepsilon > \varepsilon$. Allora esisterebbero $x, y \in C_z^\varepsilon \subset B(X)$ con $\|x - y\| > \varepsilon$. Per l'uniforme convessità di X , il loro punto medio $\frac{x+y}{2}$ appartenerrebbe a $(1 - \delta(\varepsilon))B(X)$ e quindi $\frac{1}{1-\delta(\varepsilon)}f_z\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq 1$. Ma $\frac{x+y}{2} \in C_z^\varepsilon$, dunque $\frac{1}{1-\delta(\varepsilon)}f_z\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq 1$ da cui $\frac{1}{1-\delta(\varepsilon)}f_z\left(\frac{x+y}{2}\right) = 1$. Poiché z è l'unico punto in cui f_z realizza la norma, ne segue $\frac{x+y}{2} = (1 - \delta(\varepsilon))z$, che è impossibile. Infatti, essendo $\|x - y\| > \varepsilon$, esiste sicuramente $\tilde{y} \in [x, y]$ tale per cui è ancora $\|x - \tilde{y}\| > \varepsilon$: si avrebbe che $\frac{x+y}{2} = \frac{x+\tilde{y}}{2}$, un'evidente contraddizione perché $y \neq \tilde{y}$. ■

È ovvio che $\min\{\|x\|, x \in (g_z^\varepsilon)^{-1}([1, +\infty))\} = 1 - \delta(\varepsilon)$ e quindi C_z^ε e $(1 - \delta(\varepsilon))B(X)$ hanno interni disgiunti; in particolare

$$C_z^\varepsilon \subset \overline{B(X) \setminus (1 - \delta(\varepsilon))B(X)}.$$

Proposizione 2.5.2 *Se Z è un sottoinsieme denso di $S(X)$ la famiglia $\mathcal{C}_1 = \{C_z^\varepsilon, z \in Z\}$ costituisce un ricoprimento della corona sferica semiaperta $B(X) \setminus (1 - \delta(\varepsilon))B(X)$ con corpi convessi di diametro al più ε .*

Dim. Sia w un qualsiasi punto della corona $B(X) \setminus (1 - \delta(\varepsilon))B(X)$, certamente si ha che $1 - \delta(\varepsilon) < \|w\| \leq 1$. Siano inoltre w' e Z' le proiezioni di w e Z su $(1 - \delta(\varepsilon))S(X)$, ovvero

$$w' = (1 - \delta(\varepsilon))\frac{w}{\|w\|} \quad \text{e} \quad Z' = \{z' = (1 - \delta(\varepsilon))z, z \in Z\}.$$

Ovviamente Z' è denso in $(1 - \delta(\varepsilon))S(X)$. Se per assurdo non esistesse $z \in Z$ tale che $w \in C_z^\varepsilon$ allora avremmo che $g_z^\varepsilon(w) < 1$ per ogni $z \in Z$. Conseguentemente $g_z^\varepsilon(x) < 1$ per ogni $x \in \text{co}\{\text{int}(1 - \delta(\varepsilon))B(X) \cup \{w\}\}$ e $z \in Z$. Ma $(1 - \delta(\varepsilon))S(X) \cap \text{co}\{\text{int}(1 - \delta(\varepsilon))B(X) \cup \{w\}\}$ contiene necessariamente un intorno, in $(1 - \delta(\varepsilon))S(X)$, di w' ed in questo intorno vi sono sicuramente (infiniti) punti $z' \in Z'$. Per ognuno di questi punti abbiamo $g_z^\varepsilon(z') = 1$. ■

Osservazione 2.5.3 La proposizione precedente (e la sua dimostrazione) non è altro che una riesposizione del fatto che se $\overline{Z} = S(X)$ ed f_z è un funzionale di supporto che realizza la propria norma in z allora

$$\bigcap_{z \in Z} f_z^{-1}((-\infty, 1]) = B(X).$$

Osservazione 2.5.4 Si noti che

$$B(X) \setminus (1 - \delta(\varepsilon))B(X) \not\subseteq \cup \mathcal{C}_1 \subseteq \overline{B(X) \setminus (1 - \delta(\varepsilon))B(X)},$$

perché C_z^ε contiene certamente $(1 - \delta(\varepsilon))\frac{z}{\|z\|} \in S(1 - \delta(\varepsilon))$. Inoltre se $Z \neq S(X)$

$$\cup \mathcal{C}_1 \not\subseteq \overline{B(X) \setminus (1 - \delta(\varepsilon))B(X)},$$

infatti, essendo $(1 - \delta(\varepsilon))B(X)$ strettamente convessa, si ha che

$$\cup \mathcal{C}_1 \cap (1 - \delta(\varepsilon))(S(X) \setminus Z) = \emptyset.$$

Vogliamo ora ricavare da questo ricoprimento un piastrellamento convesso. A questo scopo costruiamo un particolare insieme denso Z .

Sia $A_1 \subset S(X)$ un insieme 1-separato massimale. Tramite il lemma di Zorn possiamo ottenere un insieme $\frac{1}{2}$ -separato massimale $A_2 \supset A_1$ ed, iterando, una successione $\{A_n\}_{n=1}^{+\infty}$ di insiemi incatolati con $A_n \subset A_{n+1}$ ed A_n 2^{-n+1} -separato massimale. È facile rendersi conto che $Z = \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i$ è un sottoinsieme denso di $S(X)$; inoltre, analogamente a quanto verificato nella proposizione 1.2.7 e nell'osservazione 1.2.8, $\text{card } Z = \text{dens } S(X) = \text{dens } X$. L'insieme Z possiede in modo del tutto naturale il seguente ordinamento parziale:

$$\alpha \prec \beta \iff \alpha \in A_n, \beta \in A_m \setminus A_n \quad n < m.$$

Possiamo certamente estendere questo ordinamento parziale ad uno totale e buono (in pratica basta ben ordinare A_1 e, per ogni $n > 1$, gli elementi di $A_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i$). Quindi $Z = \{z_\nu\}_{1 \leq \nu < \gamma}$.

Proposizione 2.5.5 *Fissato un indice $\bar{\nu}$ qualsiasi, se esiste $x \in S(X)$ per cui per ogni $c > 0$ l'insieme $B(x, c) \cap \{z_\nu\}_{\nu < \bar{\nu}}$ è infinito allora $\overline{\{z_\nu\}_{\nu < \bar{\nu}}} = S(X)$. Viceversa, se esiste $x \in S(X)$ ed una costante $c > 0$ per i quali l'insieme $B(x, c) \cap \{z_\nu\}_{\nu < \bar{\nu}}$ è finito allora esiste un $k \in \mathbb{N}$ per cui $\{z_\nu\}_{\nu < \bar{\nu}} \subset \bigcup_{i=1}^k A_i$.*

Dim. Se per ogni $c > 0$ l'insieme $B(x, c) \cap \{z_\nu\}_{\nu < \bar{\nu}}$ è infinito, allora essendo, per ogni n , A_n 2^{-n+1} -separato si deve anche avere che per ogni $k \in \mathbb{N}$ l'insieme $\{z_\nu\}_{\nu < \bar{\nu}} \setminus \bigcup_{i=1}^k A_i \neq \emptyset$ e quindi $\{z_\nu\}_{\nu < \bar{\nu}}$ contiene infiniti A_n . Allora $\{z_\nu\}_{\nu < \bar{\nu}}$ è denso in $S(X)$. ■

Siano

$$\begin{aligned} T_1^\varepsilon &= C_{z_1}^\varepsilon = B(X) \cap (g_{z_1}^\varepsilon)^{-1}([1, +\infty)), \\ T_\nu^\varepsilon &= C_{z_\nu}^\varepsilon \cap \bigcap_{1 \leq \mu < \nu} (g_{z_\mu}^\varepsilon)^{-1}((-\infty, 1]) \quad 1 < \nu < \gamma, \\ R_\nu^\varepsilon &= B(X) \cap \bigcap_{1 \leq \mu < \nu} (g_{z_\mu}^\varepsilon)^{-1}((-\infty, 1]) \quad 1 < \nu < \gamma. \end{aligned}$$

Ovviamente ogni T_ν^ε è chiuso, convesso ed, essendo $T_\nu^\varepsilon \subset C_{z_\nu}^\varepsilon$, $\text{diam } T_\nu^\varepsilon \leq \varepsilon$ e $T_\nu^\varepsilon \subset \overline{B(X) \setminus (1 - \delta(\varepsilon))B(X)}$. È altrettanto evidente che anche R_ν^ε è convesso e che $\bigcup_{\mu < \nu} T_\mu^\varepsilon = \bigcup_{\mu < \nu} C_{z_\mu}^\varepsilon$. Dalla definizione segue inoltre che $\text{int } T_\mu^\varepsilon \cap \text{int } T_\nu^\varepsilon = \emptyset$ se $\mu \neq \nu$, tuttavia questi interni potrebbero essere potenzialmente vuoti. T_ν^ε invece non è mai vuoto: contiene, infatti, almeno $(1 - \delta(\varepsilon)) \frac{z_\nu}{\|z_\nu\|}$.

Considerando un particolare R_ν^ε , o $R_\nu^\varepsilon \setminus (1 - \delta(\varepsilon))B(X)$ ha interno vuoto, oppure no.

Nel primo caso, si ha $R_\nu^\varepsilon \subset (1 - \delta(\varepsilon))B(X)$: infatti, se esistesse $w \in R_\nu^\varepsilon$ con $\|w\| > 1 - \delta(\varepsilon)$, essendo $\text{co}(\{w\} \cup (1 - \delta(\varepsilon))B(X)) \subset R_\nu^\varepsilon$ si avrebbe che $R_\nu^\varepsilon \setminus (1 - \delta(\varepsilon))B(X)$ avrebbe interno non vuoto. Quindi possiamo fermarci e non prendere in considerazione i T_μ^ε con $\mu \geq \nu$: per ricoprire $B(X) \setminus (1 - \delta(\varepsilon))B(X)$ bastano i $\{T_\mu^\varepsilon\}_{\mu < \nu}$.

Altrimenti se $R_\nu^\varepsilon \setminus B(1 - \delta(\varepsilon))$ ha interno non vuoto esiste un punto $w \in R_\nu^\varepsilon \setminus (1 - \delta(\varepsilon))B(X)$ ed un intorno $W(w, c) \subset R_\nu^\varepsilon \setminus (1 - \delta(\varepsilon))B(X)$. Ma anche $\text{co}(W(w, c) \cup (1 - \delta(\varepsilon))B(X)) \subset R_\nu^\varepsilon$, quindi esiste un intorno di $w' = (1 - \delta(\varepsilon))\frac{w}{\|w\|}$ in cui non cadono $\{z_\mu\}_{\mu < \nu}$ e quindi, alla luce dell'osservazione 2.5.5, gli $\{z_\mu\}_{\mu \leq \nu}$ sono 2^{-j} -separati per qualche $j \in \mathbb{N}$. Allora T_ν^ε avrà interno non vuoto.

Posto $\gamma^\varepsilon = \min_{\Gamma, <} \{\nu : \text{int}(R_\nu^\varepsilon \setminus (1 - \delta(\varepsilon))B(X)) = \emptyset\}$ (questo minimo esiste perché l'ordinamento è buono), da quanto detto segue allora che vale il

Teorema 2.5.6 *La famiglia $\mathcal{T}_1 = \{T_\nu^\varepsilon, \nu < \gamma^\varepsilon\}$ costituisce un piastrellamento per la corona sferica $B(X) \setminus (1 - \delta(\varepsilon))B(X)$ i cui membri sono corpi convessi con diametro al più ε .*

Se ripetiamo la costruzione precedente con $\frac{\varepsilon}{r}$ al posto di ε otteniamo corpi $T_\nu^{\frac{\varepsilon}{r}}$ con $\text{diam} T_\nu^{\frac{\varepsilon}{r}} \leq \frac{\varepsilon}{r}$. Quindi $\text{diam} rT_\nu^{\frac{\varepsilon}{r}} \leq \varepsilon$ ed $rT_\nu^{\frac{\varepsilon}{r}} \subset rB(X)$, $rT_\nu^{\frac{\varepsilon}{r}}$ e $(r - r\delta(\frac{\varepsilon}{r}))B(X)$ hanno interni disgiunti ed, in perfetta analogia con quanto succedeva prima, la famiglia $\mathcal{T}_r = \{rT_\nu^{\frac{\varepsilon}{r}}, \nu < \gamma_r^{\frac{\varepsilon}{r}}\}$ costituisce un piastrellamento per la corona sferica $rB(X) \setminus (r - r\delta(\frac{\varepsilon}{r}))B(X)$ i cui membri sono corpi convessi con diametro al più ε .

Forti di questo fatto, vogliamo ripartire lo spazio X in un'infinità numerabile di corone sferiche concentriche, così da applicare per ognuna di queste corone la costruzione ed ottenere in questo modo un piastrellamento convesso uniformemente limitato dall'alto per tutto lo spazio X . Perciò definiamo

(implicitamente) la successione per ricorrenza $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$\begin{aligned} r_1 &= 1 \\ r_2 &= r_1 + r_2 \delta \left(\frac{\varepsilon}{r_2} \right) \\ r_3 &= r_2 + r_3 \delta \left(\frac{\varepsilon}{r_3} \right) \\ &\vdots \\ r_{n+1} &= r_n + r_{n+1} \delta \left(\frac{\varepsilon}{r_{n+1}} \right) \\ &\vdots \end{aligned}$$

È facile rendersi conto che, dato r_n , siamo sempre in grado di trovare univocamente r_{n+1} (e quindi, induttivamente, la successione è ben definita). Sia infatti, per ogni $x \geq \frac{\varepsilon}{2}$, $\varphi(x) = x \left(1 - \delta \left(\frac{\varepsilon}{x} \right) \right)$ (quindi $\varphi(r_{n+1}) = r_n$). Essendo δ continua e monotona crescente si ha che anche $1 - \delta \left(\frac{\varepsilon}{x} \right)$ è continua e monotona crescente; inoltre $\delta \leq 1$ e quindi $1 - \delta \left(\frac{\varepsilon}{x} \right) \geq 0$. Allora φ è continua e strettamente crescente e dunque invertibile. Perciò $r_{n+1} = \varphi^{-1}(r_n)$. Altrettanto facilmente si dimostra che $r_n \nearrow +\infty$. Infatti $\delta > 0$, quindi $\varphi(x) < x$, $\varphi^{-1}(x) > x$ e allora $r_{n+1} > r_n$, ovvero (come sicuramente ci aspettavamo) la successione $\{r_n\}$ è monotona crescente. Se per assurdo $r_n \rightarrow r$, $1 \leq r < \infty$, allora, per la continuità di φ , sarebbe $\varphi(r) = r = \varphi^{-1}(r)$.

Ovviamente $\mathcal{T}_{r_n} \cap \mathcal{T}_{r_m} = \emptyset$ se $|n - m| > 1$ mentre, per l'osservazione 2.5.4, $\mathcal{T}_{r_n} \cap \mathcal{T}_{r_{n+1}} \subsetneq S(r_n)$. Quindi la famiglia

$$\mathcal{T} = \{(1 - \delta(\varepsilon)B(X))\} \cup \bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathcal{T}_{r_n}$$

costituisce un piastrellamento convesso uniformemente limitato dall'alto di X i cui membri hanno diametro al più $\max\{1 - \delta(\varepsilon), \varepsilon\} = \bar{\varepsilon}$. Si è perciò dimostrato il

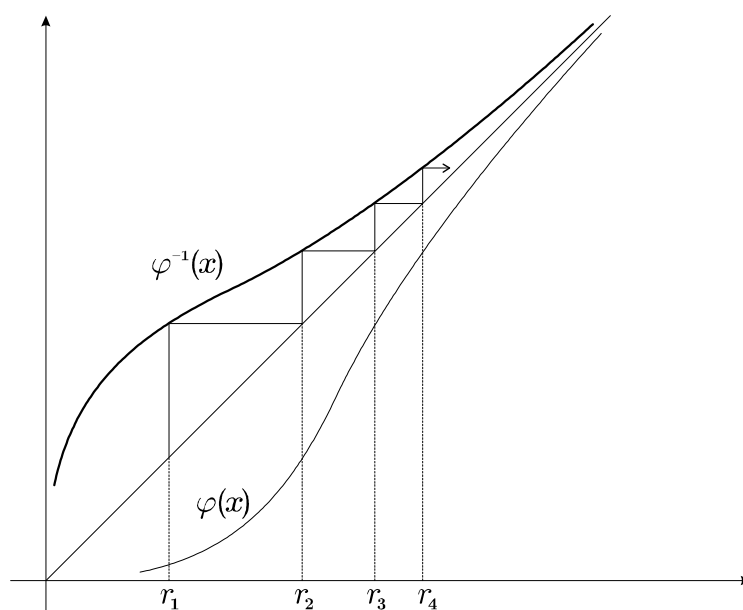


Figura 2.8: Costruzione per ricorrenza di $\{r_n\}_{n=1}^{+\infty}$.

Teorema 2.5.7 *Ogni spazio di Banach uniformemente convesso ammette un piastrellamento convesso uniformemente limitato.*

Osservazione 2.5.8 Questo piastrellamento non può essere localmente finito: lo si intuisce dalla costruzione (l'insieme Z è denso) e non potrebbe comunque, quando $\dim X = \infty$, essere altrimenti per il teorema di Corson 1.1.8. È inoltre chiaro che $\text{card } \mathcal{T} = \text{dens } X$ e quindi, per il teorema 1.2.9, il piastrellamento \mathcal{T} è ottimale dal punto di vista della cardinalità.

Il procedimento visto non sembra direttamente estendibile al caso più generale degli spazi che godono della proprietà di Radon-Nikodym. Infatti se lo spazio non è uniformemente convesso il modulo di convessità $\delta(x)$ è nullo per ogni $x \in [0, d]$, ove $d = \min_{x \in [0, 2]} \{x : \delta(x) > 0\} > 0$ ($d = 0$ se e solo se lo spazio è uniformemente convesso). Se ε è sufficientemente grande, ovvero $\varepsilon > d$, è certamente possibile effettuare almeno il piastrellamento

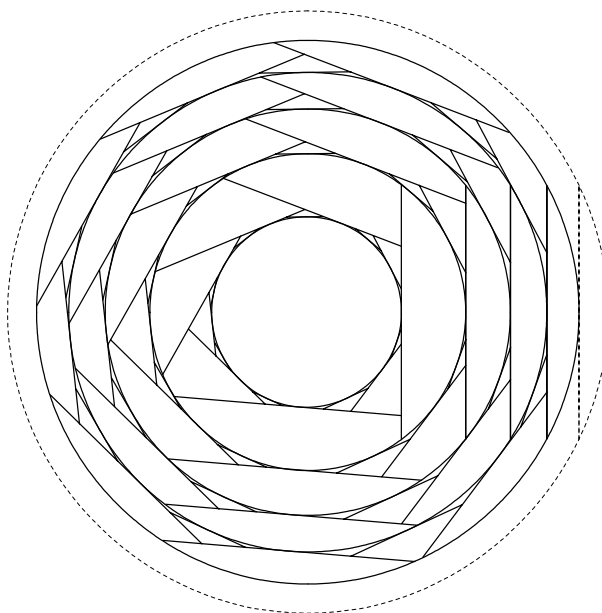


Figura 2.9: Piastramento equilimitato per spazi uniformemente convessi.

$\mathcal{T}_1 \cup \{(1 - \delta(\varepsilon))B(X)\}$ della palla unitaria $B(X)$. Tuttavia la successione per ricorrenza $\{r_n\}_{n=1}^{+\infty}$ converge ad $r = \frac{\varepsilon}{d} < \infty$, minimo punto fisso della mappa φ^{-1} , e non sarà quindi possibile piastrellare alcuna corona sferica il cui raggio esterno sia maggiore di r .

In termini qualitativi cerchiamo ora di chiarire come mai lo schema costruttivo di questo piastrellamento per spazi uniformemente convessi aggiri la problematica incontrata durante la costruzione del piastrellamento equilimitato per spazi RNP generici. Dato un corpo (convesso) qualsiasi ci si trovava eventualmente ad avere un ricoprimento che non era un piastrellamento, in quanto alcuni membri (gli ultimi seguendo l'ordine di taglio) avevano interno vuoto. In questo piastrellamento per spazi uniformemente convessi succede praticamente lo stesso: i corpi (addirittura non convessi) che vengono affettati sono le corone sferiche *chiuse* ed anche qui gli “ultimi” membri hanno (sicuramente) interno vuoto. La differenza - decisiva - è nel sapere esatta-

mente dove si trovano le fette con interno vuoto! Infatti, come abbiamo visto, le fette il cui interno è vuoto sono contenute interamente nella superficie interna della corona sferica e giacciono perciò anche nella superficie esterna di una corona sferica più piccola. È allora possibile scartare tutti questi membri in quanto la porzione di spazio che ricoprivano è comunque ricoperta da altre piastrelle (quelle della corona sferica più piccola) il cui interno è certamente non vuoto.

Concludiamo il capitolo con una osservazione.

Tutti i piastrellamenti visti in questo capitolo hanno una caratteristica significativa in comune: essi sono generati ripartendo lo spazio in corone sferiche concentriche e piastrellando quindi, in modo del tutto simile, le singole corone. Spesso era proprio questa “struttura” sottostante che impediva l’equilimitatezza del piastrellamento. Per garantire che le piastrelle del piastrellamento universale avessero interno non vuoto è stato addirittura necessario prendere una successione di raggi $\{r_n\}$ con $r_{n+1} - r_n \rightarrow +\infty$, peggiorando - relativamente all’equilimitatezza - la situazione. La costruzione vista in questo paragrafo, sfruttando l’ipotesi di uniforme convessità, risolve la questione utilizzando una opportuna successione $\{r_n\}$ con $r_{n+1} - r_n \rightarrow 0$ che, pur crescendo *abbastanza* lentamente (allo scopo di garantire l’equilimitatezza) non cresce *troppo* lentamente (dandoci piastrelle che sono effettivamente corpi) e che è comunque illimitata (permettendoci così di ricoprire tutto lo spazio).

Capitolo 3

Piastrellamenti speciali

3.1 Proiezioni metriche, insiemi prossimali discreti e diagrammi di Voronoi

Definizione 3.1.1 Sia (X, d) uno spazio metrico e K un suo sottoinsieme non vuoto. La funzione multivoca $P_K : X \rightarrow 2^K$, definita associando ad ogni $x \in X$ l'insieme

$$P_K(x) = \{k \in K : d(x, k) = \text{dist}(x, K)\},$$

viene detta proiezione metrica di X su K . Equivalentemente si può definire $P_K(x) = K \cap B(x, \text{dist}(x, K))$. $P_K(x)$ è quindi l'insieme (eventualmente vuoto) dei punti di K che sono (in K) i più vicini a x .

Definizione 3.1.2 L'insieme K viene detto prossimale se $P_K(x)$ è non vuoto per ogni $x \in X$. Se inoltre $P_K(x)$ è un singoletto per ogni $x \in X$, l'insieme prossimale K viene detto insieme di Chebyshev.

Se X è uno spazio euclideo finito-dimensionale un insieme è di Chebyshev se e solo se è chiuso e convesso ([J]). Quando X è un generico spazio di

Hilbert, un chiuso e convesso è sempre di Chebyshev (per il classico “teorema della migliore approssimazione”) ma non è noto tuttavia se valga il viceversa: è questo, forse, il più famoso problema aperto di teoria dell’approssimazione. Nel prossimo paragrafo verrà descritto un insieme di Chebyshev discreto non banale (lo spazio, ovviamente, non sarà di Hilbert).

Definizione 3.1.3 *Se K è un insieme prossimale discreto, gli insiemi*

$$T_k = P_K^{-1}(k) = \{x \in X : k \in P_K(x)\}$$

sono detti celle di Voronoi. Un piastrellamento i cui membri siano celle di Voronoi viene usualmente detto diagramma di Voronoi.

Definizione 3.1.4 *Uno spazio normato X viene detto localmente uniformemente convesso in $z \in S(X)$ se per ogni $\varepsilon \in (0, 2]$ esiste $\delta(\varepsilon) > 0$ tale che per tutti gli $y \in B(X)$ con $\|y - z\| \geq \varepsilon$ si ha che $\|\frac{y+z}{2}\| \leq (1 - \delta(\varepsilon))$.*

Teorema 3.1.5 *Sia K un sottoinsieme prossimale discreto di uno spazio normato X . Per ogni $k \in K$ l’insieme T_k è chiuso e stellato rispetto a k , che ne è punto interno. Se lo spazio X è strettamente convesso i T_k hanno interni a due a due disgiunti. Se inoltre X è localmente uniformemente convesso allora T_k è un corpo e quindi la famiglia $\mathcal{K} = \{T_k\}_{k \in K}$ costituisce un piastrellamento stellato di X . Quando X è uno spazio a prodotto interno i T_k sono insiemi convessi e conseguentemente \mathcal{K} è un piastrellamento convesso.*

Schema della dim. Direttamente dalla disuguaglianza triangolare si ha che, per ogni $x \in T_k$, il segmento $[x, k] \subset T_k$ e quindi T_k è stellato rispetto a k . Con analogia facilità si dimostra che $k \in \text{int } T_k$ e che $(T_k)^\circ$ è aperto. Se k e l sono punti distinti di K e gli insiemi T_k e T_l hanno un punto interno in comune (ovviamente equidistante da k e l), allora l’insieme $T_k \cap T_l$

contiene un segmento $[p, q]$ parallelo a $[k, l]$. Certamente $\|q - k\| = \|q - l\|$ e $\|p - k\| = \|p - l\|$; inoltre si può provare (sfruttando la convessità della norma) che $\|p - l\| = \|q - l\|$, ossia che le quattro norme sono tutte uguali. Allora

$$\|q - l\| = \|q - k\| = \|q - (k + q - p)\| \quad (= \|p - k\|),$$

quindi $[k, l] \subset S(q, \|q - l\|)$ e lo spazio non può perciò essere strettamente convesso. Similmente si prova che se lo spazio è localmente uniformemente convesso e $x \in T_k$, allora il segmento aperto $(x, k) \subset \text{int } T_k$, quindi x è punto di accumulazione di punti interni di T_k e $\overline{\text{int } T_k} = T_k$. Per dimostrare l'ultimo enunciato della tesi, si noti che

$$T_k = \bigcap_{l \in K \setminus \{k\}} H(k, l) \quad \text{ove } H(k, l) = \{x \in X : \|x - k\| \leq \|x - l\|\}.$$

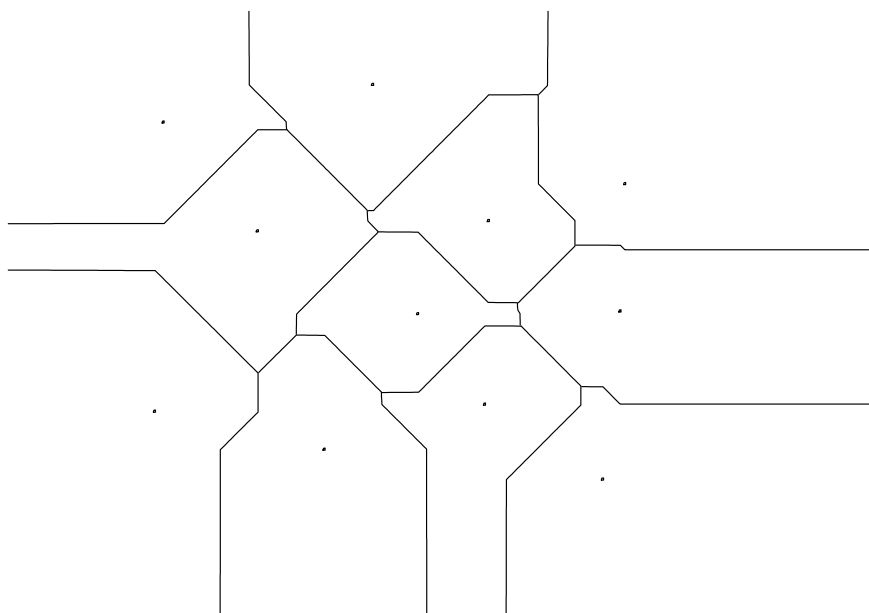
Quando X è uno spazio a prodotto interno si ha ([PK]) che $H(k, l)$ è il semispazio chiuso definito dalla disuguaglianza

$$2 \langle x, l - k \rangle \leq \langle l, l \rangle - \langle k, k \rangle;$$

T_k è allora convesso perché intersezione di convessi. ■

A titolo di esempio, nelle figure 3.1-3.5 sono illustrati i piastrellamenti di $(\mathbb{R}^2, p) = l^p(\{x_1, x_2\})$ costituiti da celle di Voronoi ottenute partendo da un medesimo insieme prossimale discreto, al variare dell'indice p da cui dipende la norma.

Osservazione 3.1.6 È abbastanza evidente che nei casi “estremi” in cui la norma non è strettamente convessa possono sorgere delle complicazioni (si pensi, per esempio, ad un insieme prossimale in cui più punti siano allineati parallelamente ad una faccia della palla: l'intersezione degli interni delle celle di Voronoi relative a questi punti sarebbe certamente non vuota). Si potrebbe

Figura 3.1: $p = 1$

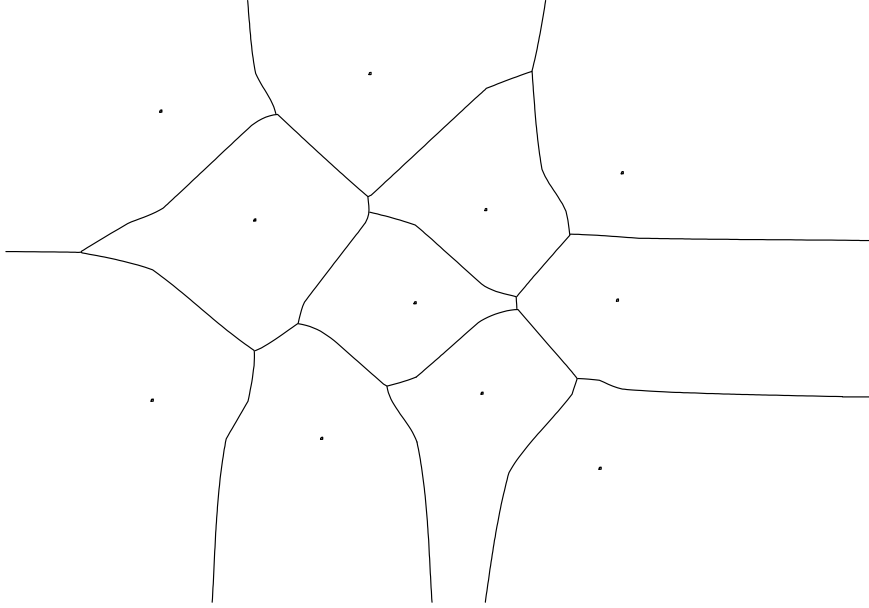
allora essere portati a pensare che l'ipotesi di stretta convessità sia ideale per ottenere, partendo da un insieme prossimale discreto, un piastrellamento. Quasi paradossalmente ciò non è vero: nel prossimo paragrafo vedremo che il piastrellamento “migliore” relativamente alla “separazione” degli interni che si possa desiderare (ovvero un piastrellamento semplice) si ottiene proprio in uno spazio (un particolare l^1 non separabile) non strettamente convesso.

Tuttavia garantire l'esistenza di insieme prossimali discreti “abbastanza buoni” non è sempre possibile.

Proposizione 3.1.7 *Lo spazio di Hilbert separabile l^2 non possiede alcun sottoinsieme prossimale discreto K tale che*

$$\sup \{ \text{dist}(x, K) : x \in l^2 \} < \infty.$$

Dim. Sappiamo (dall'osservazione 1.2.10) che K è al più numerabile.

Figura 3.2: $p = \frac{4}{3}$

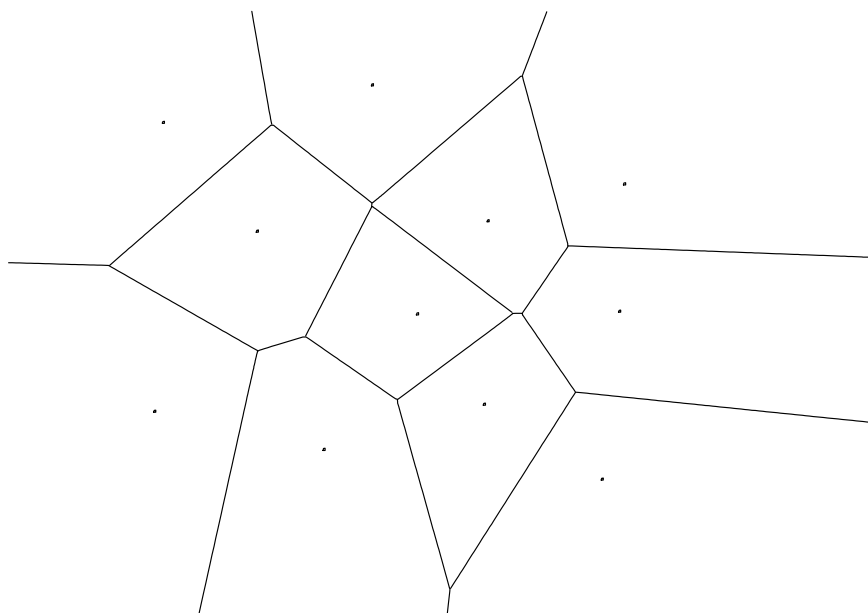
Senza perdita di generalità, supponiamo che $0 \notin K$. Posto

$$V = \{x \in l^2 : \|x\| \leq \text{dist}(x, K)\}$$

È facile rendersi conto che V è un insieme chiuso limitato e convesso e che 0 è un punto interno di V . Un qualsiasi punto $x \in V$ appartiene a $\text{bdy } V$ se e solo se esiste $k \in K$ tale che $\|x\| = \|k - x\|$ ovvero, per l'uguaglianza del parallelogramma, $\left\langle x, \frac{2k}{\|k\|^2} \right\rangle = 1$. Per ogni $k \in K$ poniamo

$$F_k = \left\{ x \in V : \left\langle x, \frac{2k}{\|k\|^2} \right\rangle \geq \left\langle x, \frac{2j}{\|j\|^2} \right\rangle \quad \forall j \in K \right\}.$$

Ciascun F_k è w -chiuso e quindi per il teorema di Baire esiste $\bar{k} \in K$ tale per cui $F_{\bar{k}}$ ha interno debole non vuoto in V . Sia \bar{x} un punto debolmente interno a $F_{\bar{k}} \cap V$ e fortemente interno a V : deve essere $\left\langle \bar{x}, \frac{2\bar{k}}{\|\bar{k}\|^2} \right\rangle < 1$. Sia W un intorno debole dell'origine tale che $(\bar{x} + W) \cap V \subset F_{\bar{k}}$. Essendo l'insieme

Figura 3.3: $p = 2$

$W \cap \{x : (x, \bar{k}) = 0\}$ non limitato in norma, esiste $x \in W$ per cui $\langle x, \bar{k} \rangle = 0$ ed $\bar{x} + x \in \text{bdy } V$ (in particolare si ha anche $\bar{x} + x \in F_{\bar{k}}$). Allora esiste pure $k' \in K$ tale che

$$1 = \left\langle \bar{x} + x, \frac{2k'}{\|k'\|^2} \right\rangle \leq \left\langle \bar{x} + x, \frac{2\bar{k}}{\|\bar{k}\|^2} \right\rangle = \left\langle \bar{x}, \frac{2\bar{k}}{\|\bar{k}\|^2} \right\rangle < 1,$$

il che è assurdo. ■

A questo proposito si può provare che

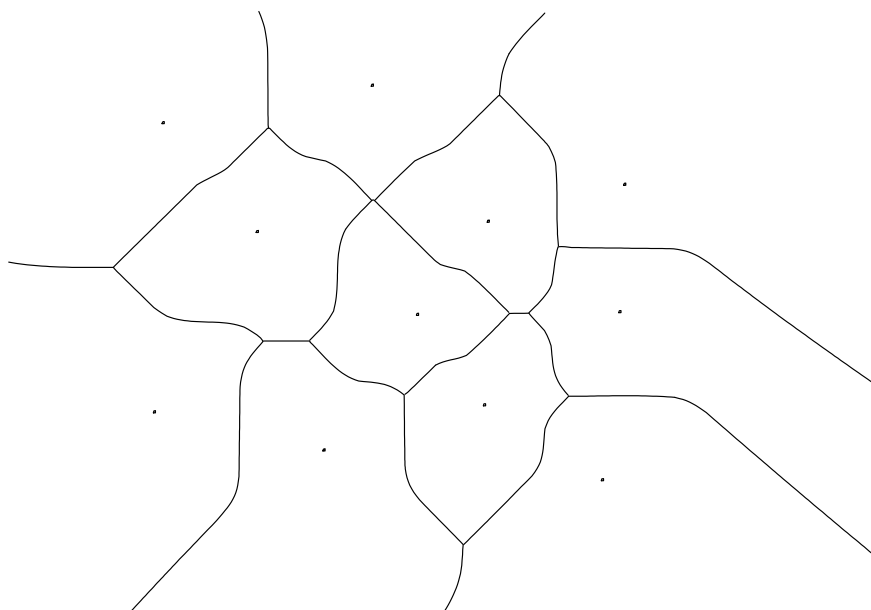
Proposizione 3.1.8 *Se K è un insieme prossimale di l^2 tale per cui*

$$\sup \{ \text{dist}(x, K) : x \in l^2 \} < \infty$$

allora il sottoinsieme di K

$$\tilde{K} = \{k \in K : \exists x \in l^2 \setminus K, P_K(x) = \{k\}\}$$

è più che numerabile (e quindi, per l'osservazione 1.2.10, K non può essere discreto).

Figura 3.4: $p = 8$

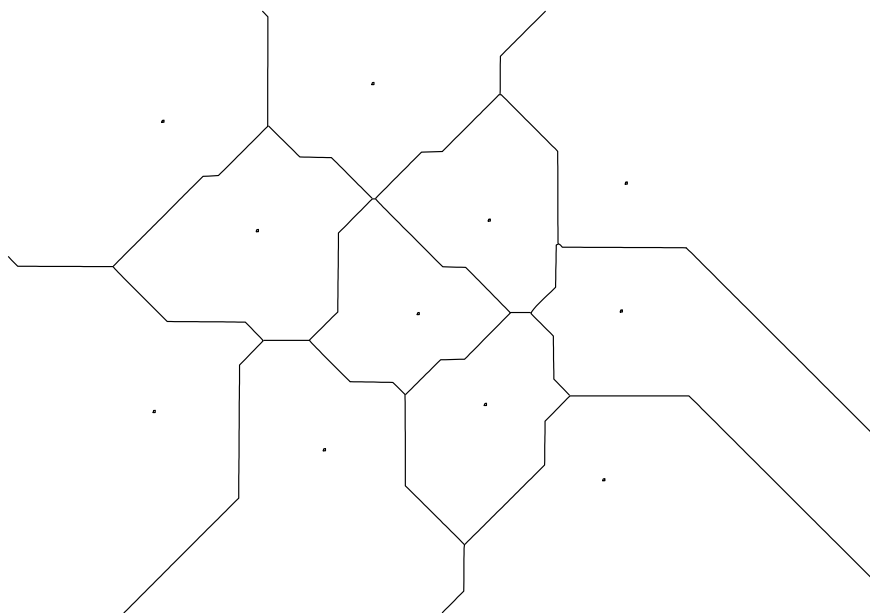
La dimostrazione di questa proposizione si basa sul seguente risultato di cui omettiamo la dimostrazione ([F5]). Ricordiamo che, se X è uno spazio di Banach e $C \subset X$ è convesso, un punto $c \in C$ viene detto *esposto* se esiste un funzionale $f_c \in X^*$ che lo espone, ovvero tale che $f_c(c) = \sup_{x \in C} f_c(x)$ e per ogni $\tilde{c} \in C$ con $f_c(\tilde{c}) = \sup_{x \in C} f_c(x)$ si ha $\tilde{c} = c$.

Teorema 3.1.9 *Un corpo convesso di uno spazio riflessivo infinito-dimensionale possiede una quantità più che numerabile di punti esposti.*

Dim. (della proposizione). Posto $V = \{x \in l^2 : \|x\| \leq \text{dist}(x, K)\}$ sia V^0 l'insieme polare di V in X^* , ovvero

$$V^0 = \left\{ f \in X^* : \sup_{x \in V} f(x) \leq 1 \right\}.$$

È facile rendersi conto che $\frac{2k}{\|k\|^2} \in V^0$ per ogni $k \in K$. Se y è un punto esposto di V^0 , esiste certamente $x \in \text{bdy } V$ tale che $\langle x, y \rangle = 1$ e $\langle x, v \rangle < 1$

Figura 3.5: $p = +\infty$

per ogni $v \in V^0$, $v \neq y$. Essendo x un punto della frontiera di V esiste anche $\bar{k} \in K$ tale per cui $\|x\| = \|x - \bar{k}\|$, ovvero $\left\langle x, \frac{2\bar{k}}{\|\bar{k}\|^2} \right\rangle = 1$. Allora $y = \frac{2\bar{k}}{\|\bar{k}\|^2}$. Inoltre, per ogni $k \in K \setminus \{\bar{k}\}$, si ha $\left\langle x, \frac{2k}{\|k\|^2} \right\rangle < 1$ o, equivalentemente, $\|k - x\| > \|\bar{k} - k\|$. Perciò \bar{k} appartiene a \bar{K} e quindi, sfruttando il teorema 3.1.9, si ottiene la tesi. ■

3.2 Il piastrellamento di Klee

Definizione 3.2.1 *Un sottoinsieme R di uno spazio metrico X viene detto δ -rete (in X) se per ogni $x \in X$ si ha $\text{dist}(x, R) \leq \delta$.*

In riferimento alla dimostrazione della proposizione 1.2.7, osserviamo che un insieme δ -separato massimale è anche una δ -rete.

Il piastrellamento che esamineremo tra poco è costruito, con la tecnica

vista nel paragrafo precedente, a partire da un sottoinsieme prossimale $K \subset l^p(n)$ che è contemporaneamente $2^{1/p}$ -separato ed 1-rete. Garantire l'esistenza di un simile insieme, come si può intuire dalle proposizioni 3.1.7 e 3.1.8, richiederà un certo sforzo e, naturalmente, qualche ipotesi aggiuntiva: in particolare avremo bisogno che n sia un numero cardinale tale che $n^{\aleph_0} = n$.

Due sono i metodi disponibili per costruire K . Il primo, esposto nel 1981 in [K3] e specifico per gli spazi l^p , dimostra l'esistenza di una 1-rete $2^{1/p}$ -separata, prima in spazi prodotto di l^p e successivamente per $l^p(n)$. Il secondo metodo, descritto in [KMZ1] (1986), si basa invece su una costruzione astratta e di validità più generale.

Una descrizione dettagliata di questi metodi esula dallo scopo di questa tesi e ci limiteremo a presentare solo uno schema della linea dimostrativa dell'ultimo e più generale metodo. Proprio su questo metodo si basa anche l'esistenza (in particolari spazi vettoriali topologici) di un piastrellamento liscio e strettamente convesso ([KMZ1]).

Apriamo una parentesi sui numeri ordinali.

Ogni numero ordinale γ è, dal punto di vista logico, equivalente all'insieme O_γ di tutti gli ordinali minori di γ , ovvero

$$O_\gamma = \{\beta : \beta \text{ è ordinale, } \beta < \gamma\};$$

Un ordinale γ viene detto *ordinale iniziale*, o *numero cardinale*, se, per ogni $\beta < \gamma$, l'insieme O_β non è equipotente a O_γ . La cardinalità di un insieme X , $\text{card } X$, è il numero cardinale n tale per cui X sia equipotente a O_n .

Per ogni numero cardinale n , il *successore* n^+ è il primo cardinale s tale che $n < s$ o, equivalentemente, tale che O_s non sia equipotente ad O_n . Un sottoinsieme A di un insieme ordinato E viene detto *cofinale* in E se per ogni $x \in E$ esiste $y \in A$ tale che $x \leq y$. È noto che ogni cardinale succes-

sore infinito n è *regolare*, ovvero O_n è equipotente ad ogni suo sottoinsieme cofinale.

Sia n un numero cardinale. D'ora in avanti indicheremo con $l^p(n)$ lo spazio di tutte le funzioni reali x su O_n tali che $\sum_{\alpha \in O_n} |x(\alpha)|^p < \infty$. Ovviamente il supporto di x sarà al più numerabile.

Teorema 3.2.2 *Sia S_n un insieme di cardinalità $n \geq \aleph_0$ con n regolare e $\{S_\alpha\}_{\alpha \leq n}$ una famiglia di sottoinsiemi di S_n tale che*

1. $S_\alpha \subset S_\beta$ per ogni $\alpha < \beta \leq n$;
2. $S_n = \bigcup_{\alpha < n} S_\alpha$;
3. in ogni S_α esista una famiglia \mathbb{K}_α di collezioni \mathbf{K} di sottoinsiemi K di S_α tale che $\text{card } K > 1$ per ogni $K \in \mathbf{K} \in \mathbb{K}_\alpha$ (si noti che la collezione vuota appartiene a \mathbb{K}_α);
4. sia possibile l'estensione al successivo, cioè per ogni $\alpha < n$ e $\mathbf{K} \in \mathbb{K}_\alpha$ sia possibile estendere la collezione \mathbf{K}' (ove $\mathbf{K}' = \mathbf{K}$ oppure $\mathbf{K}' = \mathbf{K} \cup \{\{p\}\}$, $p \in S_\alpha \setminus \bigcup \mathbf{K}$) ad una collezione $\mathbf{L} \in \mathbb{K}_{\alpha+1}$ di sottoinsiemi L di $S_{\alpha+1}$ in modo che ogni $L \in \mathbf{L}$ sia l'estensione di un unico $K \in \mathbf{K}'$;
5. sia infine possibile l'estensione all'ordinale limite, cioè sia possibile estendere (nel senso sopra indicato) ad un generico ordinale limite $\lambda \leq n$ ogni collezione $\mathbf{K} \subset \bigcup_{\alpha < \lambda} S_\alpha$ tale per cui, per ogni $\alpha < \lambda$, la collezione di sottoinsiemi di S_α $\{K \cap S_\alpha : K \in \mathbf{K}, \text{card } K \cap S_\alpha > 1\}$ appartenga a \mathbb{K}_α .

Allora esiste una collezione $\mathbf{K} \in \mathbb{K}_n$ che ricopre S_n .

Lemma 3.2.3 *Siano m ed n due numeri cardinali infiniti. Sia inoltre $m = m^{\aleph_0}$ e supponiamo che $n = m^+$ oppure che m sia regolare ed $n = m$. Riferendoci alle notazioni del teorema precedente, poniamo $S_n = l^p(n)$ e per ogni $\alpha \in O_n$ sia $S_\alpha = \{x \in S_n : \text{supp } x \subset O_\alpha\}$. Se per ogni $\alpha \leq n$ è assegnata una famiglia $\mathbb{K}_\alpha \subset 2^{(2^{S_\alpha})}$ tale che siano soddisfatte le ipotesi (3)-(5) del teorema precedente, allora esiste una collezione $\mathbf{K} \in \mathbb{K}_n$ che ricopre S_n . Inoltre, per ogni funzione-scelta $c : \mathbf{K} \rightarrow S_n$ (cioè tale che $c(K) \in K$ per ogni $K \in \mathbf{K}$) esiste $U \subset O_n$, con $\text{card } U = m$, tale che il sottospazio $S_U = \{x \in S_n : \text{supp } x \subset U\}$ sia ricoperto dalla collezione*

$$\{K \cap S_U : K \in \mathbf{K}, c(K) \in S_U\}.$$

Procedimento dimostrativo. L'esistenza della copertura è assicurata, tramite il teorema 3.2.2, dalle ipotesi fatte sulla cardinalità, che implicano ([K3]) le (1)-(2) del teorema 3.2.2, e dalle ipotesi (3)-(5) dichiarate esplicitamente nell'enunciato di questo teorema. La seconda parte dell'enunciato, fondamentale per rinunciare all'ipotesi di regolarità, viene dimostrata utilizzando una tecnica basata sull'induzione transfinita ([K4]). ■

Teorema 3.2.4 *Sia m un cardinale infinito tale che $m = m^{\aleph_0}$, allora lo spazio $l^p(m)$, $1 \leq p < \infty$, possiede un insieme K che è contemporaneamente $2^{1/p}$ -separato ed 1-rete. Se $p = 1$, K risulta essere una 1-rete disgiunta, ovvero tale che esiste al più un unico $k \in K$ che realizza la distanza, e questo implica che K è un insieme di Chebyshev.*

Schema della dim. Applichiamo il lemma 3.2.3 con $n = m^+$; per ogni $\alpha \leq n$, \mathbb{K}_α consiste di tutte le collezioni di palle di raggio unitario i cui centri distano fra loro *strettamente di più* di $2^{1/p}$. Si verifica abbastanza facilmente che valgono tutte le ipotesi del 3.2.2 e quindi esiste un ricoprimento $\mathbf{K} \in \mathbb{K}_n$

di $l^p(n)$. Se utilizziamo come funzione-scelta la funzione che ad ogni palla $K \in \mathbf{K}$ associa il suo centro k , otteniamo la copertura desiderata per il sottospazio S_U . Si noti che $\text{card } S_U = m$. Essendo S_U linearmente isometrico a $l^p(m)$, abbiamo la tesi. ■

Teorema 3.2.5 *Sia $1 \leq p < \infty$ ed n un cardinale infinito tale che $n^{\aleph_0} = n$. Allora lo spazio di Banach $l^p(n)$ contiene un sottoinsieme prossimale $2^{1/p}$ -separato K tale che $\text{dist}(x, K) \leq 1$ per ogni $x \in l^p(n)$. Sia, come nella definizione 3.1.3, $T_k = \{x \in X : k \in P_K(x)\}$. Sia inoltre $\mathcal{K} = \{T_k : k \in K\}$. Allora \mathcal{K} è un piastrellamento stellato e puntualmente finito di $l^p(n)$. Ogni piastrella T_k contiene $B(k, 2^{(1-p)/p})$ ed è contenuta in $B(k, 1)$. Quando $p = 2$ il piastrellamento è convesso e non protettivo mentre, se $p = 1$, ogni piastrella è un opportuno traslato della palla unitaria, K è di Chebyshev e \mathcal{K} è semplice (e perciò non protettivo).*

Dim. Non è difficile verificare che, in $l^p(n)$, un sottoinsieme che sia $2^{1/p}$ -separato ed 1-rete è prossimale ([P]). Direttamente dalle proprietà di K si ha allora che, per ogni $k \in K$,

$$B(k, 2^{(1-p)/p}) \subseteq T_k \subseteq B(k, 1). \quad (3.1)$$

Quando $1 < p < \infty$, dal teorema 3.1.5 e dal noto teorema di Clarkson ($l^p(n)$ è uniformemente convesso se $1 < p < \infty$) segue che le piastrelle sono insiemi stellati. Il piastrellamento è puntualmente finito perché ([BRR]) la palla unitaria di $l^p(n)$ non può contenere alcun sottoinsieme $2^{1/p}$ -disperso infinito. Quando $p = 2$, lo spazio $l^p(n)$ è di Hilbert e quindi per il teorema 3.1.5 le piastrelle sono convesse; inoltre per i teoremi 1.1.15 e 1.1.8 (teorema di Corson) il piastrellamento non può essere protettivo. Se $p = 1$, da 3.1 si ottiene che $T_k = B(k, 1)$ e conseguentemente, essendo K una 1-rete disgiunta, il piastrellamento è semplice. ■

Sottolineamo che il fatto che, per $p = 1$, il piastrellamento sia semplice è diretta conseguenza del fatto che K è di Chebyshev. In riferimento all'osservazione 3.1.6 vale la pena osservare che gli spazi uniformemente convessi non ammettono insiemi di Chebyshev discreti ([K3] e [V]).

3.3 Piastrellamento stellato localmente finito

Concludiamo questo capitolo descrivendo un esempio ([FPZ2]) che risponde in modo negativo alla domanda se il teorema 1.1.8 di Corson rimanga valido anche per ricoprimenti stellati. Tale congettura venne formulata nel tentativo di dimostrare la non-protettività del piastrellamento di Klee anche nei casi non convessi con $p \in (1, +\infty) \setminus \{2\}$, problema che rimane tuttora aperto e non sembra di agevole soluzione.

Sia $(X, \|\cdot\|)$ un qualsiasi spazio normato e H un semispazio chiuso tale che $\text{bdy } H$ sia un iperpiano (chiuso) passante per l'origine. Sia z un punto interno di H con $\|z\| = 1$ e sia π la proiezione lineare continua di X su $\text{bdy } H$ lungo la linea retta $\mathbb{R}z$. Fissati H e z , si consideri il rinormamento $\|\!\| \cdot \|\!$ di X dato da

$$\|\!\|x\|\! = \|\pi(x)\| + \|x - \pi(x)\| \quad x \in X.$$

Sia $B = B_{\|\!\|\cdot\!\|}$ la palla unitaria chiusa relativamente alla nuova norma centrata nell'origine (vedi figura 3.6).

Definiamo ora i seguenti insiemi:

$$T_1 = B \cap H,$$

$$T_n = \overline{(nB \setminus (n-1)B) \cap H} \quad n = 2, 3, 4, \dots$$

Proposizione 3.3.1 *La famiglia $\{\pm T_n\}_{n=1}^{\infty}$ costituisce un piastrellamento limitato localmente finito i cui membri sono stellati (si veda la figura 3.7).*

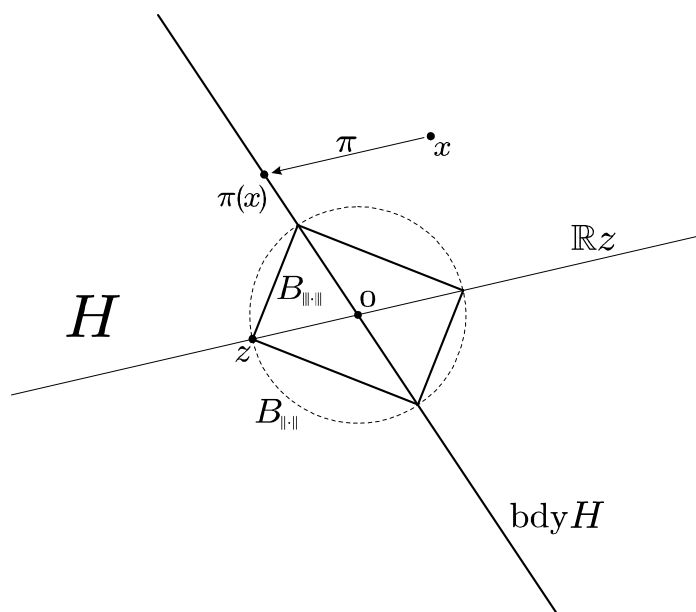


Figura 3.6: Costruzione del rinormamento.

Dim. Banalmente $T_n \subset nB$. Inoltre è facile rendersi conto che qualsiasi insieme limitato interseca al più un numero finito di membri del piastrellamento: infatti se A è limitato si deve avere che $A \subset mB$, per qualche $m \in \mathbb{N}$, e $mB = \bigcup_{1 \leq i \leq m} \pm T_i$. Dimostriamo ora che le piastrelle sono insiemi stellati. T_1 è convesso e quindi, a maggior ragione, è stellato. Mostriamo ora che, per ogni $n \geq 2$, T_n è stellato rispetto ad un qualsiasi punto s del segmento $[(n-1)z, nz]$, ovvero che per ogni $y \in T_n$ il segmento $[s, y]$ è contenuto in T_n . Si ha $s = \sigma z$ per un qualche $\sigma \in [n-1, n] \subset \mathbb{R}$ e

$$[s, y] = \{\lambda \sigma z + (1 - \lambda)y, \lambda \in [0, 1] \subset \mathbb{R}\}.$$

Si ottiene facilmente che $[s, y] \subset \overline{(nB \setminus (n-1)B)}$, infatti

$$n \geq \|\lambda \sigma z + (1 - \lambda)y\| = \lambda \sigma + (1 - \lambda)\|y\| \geq n - 1.$$

È ovvio che $[s, y] \subset H$ (s ed y appartengono ad H , che è convesso). ■

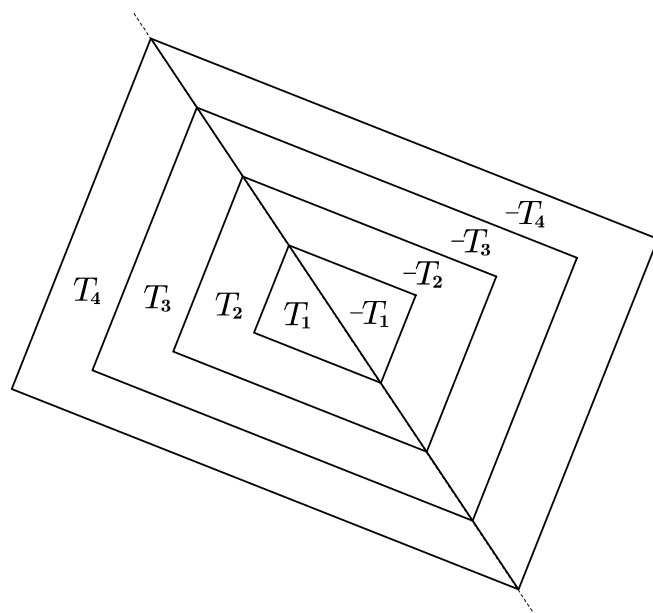


Figura 3.7: Piastrellamento stellato localmente finito.

Bibliografia

- [A] F.G. Arenas, *Tilings in topological spaces*, Internat. J. Math. & Math. Sci. **22** (3) (1999), 611-616.
- [BRR] J.A.C. Burlak, R.A. Rankin and A.P. Robertson, *The packing of spheres in the space l_p* , Proc. Glasgow Math. Assoc. **4** (1958), 22-25.
- [C] H. H. Corson, *Collections of convex sets which cover a Banach space*, Fundam. Math. **49** (1961), 143-145.
- [D] J. Diestel, *Geometry of Banach spaces - Selected topics*, Lecture Notes in Math., vol. **485**, Springer-Verlag, New-York, 1975.
- [F1] V. Fonf, *One property of Lindenstrauss-Phelps spaces*, Funct. Anal. Appl. **13** (1979), 66-67.
- [F2] V. Fonf, *Polyhedral Banach spaces*, Math. Notes USSR **30** (1981), 809-813.
- [F3] V. Fonf, *Three characterizations of polyhedral Banach spaces*, Ukrainian Math. J. **42** (1990), 1145-1148.
- [F4] V. Fonf, *On the boundary of a polyhedral Banach space*, Extracta Math. **15** (2000), 145-154.

- [F5] V. Fonf, *On exposed and smooth points of convex bodies in Banach spaces*, Bull. London Math. Soc. **28** (1996), 51-58.
- [FL] V. Fonf and J. Lindenstrauss, *Some results on infinite-dimensional convexity*, Isr. J. Math. **108** (1998), 13-32.
- [FPZ1] V. Fonf, A. Pezzotta and C. Zanco, *Tiling infinite-dimensional normed spaces*, Bull. London Math. Soc. **29** (1997), 713-719.
- [FPZ2] V. Fonf, A. Pezzotta and C. Zanco, *Singular points for tilings of normed spaces*, Rocky Mountain J. Math. **30** (3) (2000), 857-868.
- [GK] K. Goebel and W.A. Kirk, *Topics in metric fixed point theory*, Cambridge University Press (1990).
- [GM] A. Gleit and R. McGuian, *A note on polyhedral Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **33** (1972), 398-404.
- [GS] B. Grünbaum and G.C. Shephard, *Tilings and patterns*, W.H. Freeman and Co., New York (1987).
- [H] P.R. Halmos, *Naive set theory*, D. Van Nostrand Company (1960).
- [HHZ] P. Habala, P. Hájek, V. Zizler, *Introduction to Banach Spaces*, Matfyzpress, vydavatelství Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy (1996).
- [J] B. Jessen, *Two theorems on convex point sets*, (in lingua danese) Mat. Tidsskr. B. **1940** (1940), 66-70.
- [K1] V. Klee, *Some characterizations of convex polyhedra*, Acta Math. **102** (1959), 79-107.

- [K2] V. Klee, *Polyhedral sections of convex bodies*, Acta Math. **103** (1960), 243-267.
- [K3] V. Klee, *Dispersed Chebyshev sets and coverings by balls*, Math. Ann. **257** (1981), 251-260.
- [K4] V. Klee, *Do infinite-dimensional Banach spaces admit nice tilings?*, Stud. Sc. Math. Hung. **21** (1986), 415-427.
- [KMZ1] V. Klee, E. Maluta and C. Zanco, *Tiling with smooth and rotund tiles*, Fundam. Math. **126** (1986), 269-290.
- [KMZ2] V. Klee, E. Maluta and C. Zanco, *Uniform properties of collections of convex bodies*, Math. Ann. **291** (1991), 153-177.
- [L] J. Lindenstrauss, *Notes on Klee's paper "Polyhedral sections of convex bodies"*, Israel Journal of Math. **4** (1966), 235-242.
- [Ni] M.J. Nielsen, *Singular points of a convex tiling*, Math. Ann. **284** (1989), 601-616.
- [No] G. Nordlander, *The modulus of convexity in normed linear spaces*, Ark. Mat. **4** (1960), 15-17.
- [P] A. Pezzotta, *Piastrellamenti in spazi di Banach*, (tesi di laurea) Università degli Studi di Milano, A.A.1988-89.
- [PK] B.B. Panda and O.P. Kapoor, *On equidistant sets in normed linear spaces*, Bull. Austral. Math. Soc. **11** (1974), 443-454.
- [R] W.O. Ray, *Some contributions to the geometric theory of Banach spaces with applications to nonlinear operators*, Ph.D. thesis, University of Iowa (1977), 60-65.

- [T] E. Trezzi, *James boundaries di spazi di Banach*, (tesi di laurea) Università degli Studi di Milano, A.A. 1999-2000.
- [V] L.P. Vlasov, *Chebyshev sets and some of their generalizations*, (in lingua russa) *Mat. Zametki* **3** (1968), 59-69.